دانشگاه آزاد
دانشکده کامپیوتر

شبیه‌سازی کامپیوتری

گردآوری: مهندس بهروز نیرومندفام

شیوه ارتباط

- رفع اشکال در ساعات کلاس.
- ارتباط دائمی از طریق Computercollege_fam@Yahoo.com

حضور در کلاس

حضور در کلاس الزامی است و براساس قوانین آموزشی، غیبت بیش از ۱۶/۳ منجر به اعلام غیبت برای دانشجو خواهد شد.

ارزیابی

- میان ترم ۲۵٪
- کلاس و تمرین ۱۵٪
- پروژه ۱۵٪
- پایان ترم ۵۵٪
- جمع: ۱۱۰ درصد

فهرست موضوعی

- آشنایی با مفاهیم و مراحل شبیه‌سازی
- مثال هایی از شبیه سازی و مفاهیم مدل سازی سیستم ها
- آمار در شبیه سازی (مفاهیم آمار، توزیع ها و ساخت مقادیر تصادفی، اعداد تصادفی، تحلیل داده های ورودی به مدل)
- مدل های صف
- سیستم های موجودی
- تولید اعداد تصادفی
- تصدیق و اعتبارسنجی مدل های شبیه‌سازی کامپیوتری
- تحلیل داده های خروجی و مقایسه و انتخاب آلترناتیو برتر
- بهینه سازی در مدل های شبیه سازی
- آموزش صورت کلی نرم‌افزارهای آماری و شبیه سازی (**ED, Arena, Showflow, Minitab**)

منابع

• Discrete Event System Simulation, Jerry Banks et all, Fourth Edition, ۲۰۰۵, Prentice-Hall

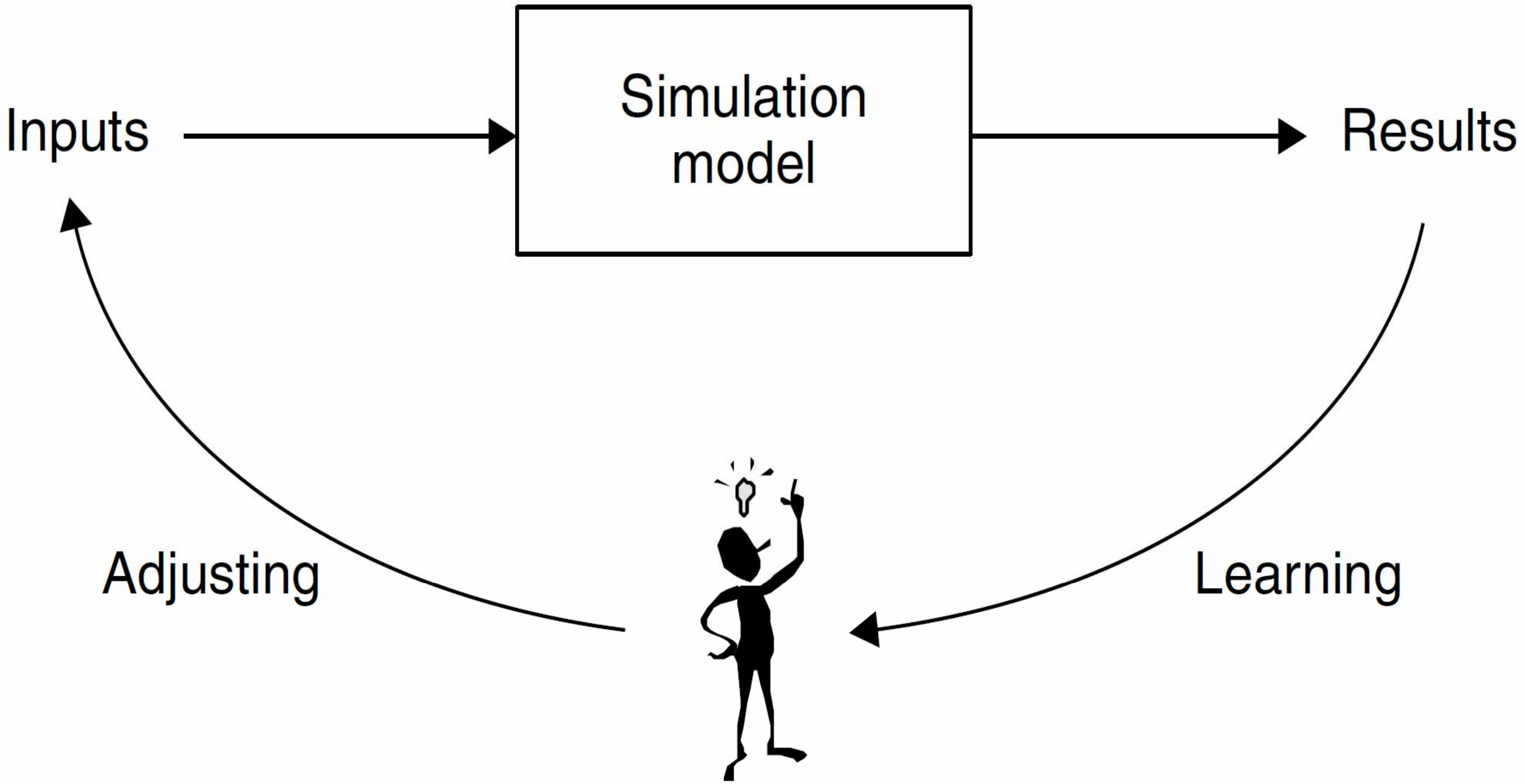
• شبیه‌سازی سیستم های گسسته پیشامد، هاشم محلوجی، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف

• علم و هنر شبیه‌سازی، ترجمه علی اکبر عرب مازار، مرکز نشر دانشگاهی

• آموزش شبیه‌سازی عملیات با Arena، شهروز انتظامی و عبدالوحید خراسانی، انتشارات ناقوس

مفاهیم و تعاریف

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com


Inputs
Simulation model
Results
Adjusting
Learning

پیشگفتار

شبیه‌سازی چه به صورت دستی چه به صورت کامپیوتری، تقلیدی از عملکرد سیستم واقعی با گذشت زمان است که به ایجاد ساختگی تاریخچه سیستم و بررسی آن به منظور دستیابی و نتیجه‌گیری در مورد ویژگی‌های عملکرد واقعی آن می پردازد. شبیه سازی اصولا به شکل مجموعه‌ای از فرض‌های مربوط به عملکرد سیستم در چارچوب رابطه‌های ریاضی و منطقی می‌باشد. شبیه‌سازی یکی از پرکاربردترین ابزار موجود علم تحقیق در عملیات است که:

- اجازه ارزیابی عملکرد سیستم را پیش از پدید آمدن می‌دهد.

- مقایسه گزینه‌های گوناگون را بدون ایجاد اختلال در سیستم واقعی مسیر می‌کند.

- فشرده‌سازی زمان را به منظور اتخاذ تصمیم‌های به موقع انجام می دهد.

- ساختار ساده و استفاده از نرم‌افزارها، امکان استفاده بسیاری را فراهم می‌کند.

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

چرا شبیه سازی مفید است؟

- با شبیه سازی بررسی و آزمایش رابطه های متقابل هر سیستم و زیر سیستم پیچیده میسر است.
- تغییرات اطلاعاتی، سازمانی و محیطی را می توان شبیه سازی کرد، و تاثیر این تغییرات را مشاهده نمود.
- با تغییر در ورودی های شبیه سازی و بررسی خروجیهای بدست آمده، می توان شناخت ارزشمندی درباره مهمترین متغیرها و چگونگی رابطه متقابل آنها به دست آورد.
- شبیه سازی را می توان مانند ابزاری آموزشی به منظور تقویت روش های تحلیلی به کار گرفت.
- از شبیه سازی می توان به منظور آزمایش طرح ها یا تصمیمات جدید، پیش از اجرا استفاده کرد.

مزایا و معایب شبیه سازی

مزایا

- استفاده مکرر
- تحلیل سیستم های پیشنهادی
- کم هزینه بودن دستیابی به داده های شبیه سازی
- سادگی در کاربرد نسبت به روش های تحلیلی
- توانایی بالاتر نسبت به روش های تحلیلی

معایب

- مدل های شبیه سازی معمولاً از لحاظ زمانی پر هزینه اند
- نیاز به اجرای فراوان در هر مورد شبیه سازی

زمینه های کاربرد شبیه سازی:

۱) شبیه سازی عملیات در فرودگاهای بزرگ توسط شرکت های هواپیمایی به منظور آزمودن تغییرات خط مش ها و عملکرد های خود.(مثلا: ظرفیت نگهداری و تعمیر,امکانات سوار و پیاده کردن مسافر,هواپیماهای کمکی و.....)

۲) شبیه سازی گذر وسایل حمل و نقل از تقاطعی که چراغ های راهنمایی دارد.با برنامه منظم زمانی ,به منظور تعیین بهترین توالی های زمانی.

۳) شبیه سازی عملیات نگهداری وتعمیر به منظور تعیین تعداد بهینه افراد گروههای تعمیراتی.

۴) شبیه سازی جریان شارژ نشده ذرات از سپر تشعشعی به منظور تعیین شدت تشعشعی که از سپر می گذرد .

۵) شبیه سازی فولاد سازی به منظور ارزیابی تغییرات در طرز انجام عملیات و ظرفیت و ترکیب امکانات.

۶) شبیه سازی اقتصاد کشور به منظور پیشبینی تاثیر تصمیمات مربوط به خط مش اقتصادی.

زمینه های کاربرد شبیه سازی:

۷) شبیه سازی جنگ های جهانی بزرگ مقیاس به منظور ارزیابی سیستم های تسحیلاتی تدافعی و تهاجمی

۸) شبیه سازی سیستم های بزرگ مقیاس توزیع و کنترل موجودی به منظور اصلاح طراحی این گونه سیستم ها مثل:جریان هدفمند کردن یارانه ها

۹) شبیه سازی تمامی عملیات هر بنگاه تجاری به منظورارزیابی وسیع در خط مش ها و عملیات آن و همچنین فراهم آوردن امکان شبیه سازی عملیات تجاری به منظور آموزش مدیران

۱۰) شبیه سازی سیستم ارتباطات تلفنی به منظور تعیین ظرفیت اجزای مورد نظر که از لحاظ ارائه رضایت بخش خدمت در اقتصاد ی ترین سطح ممکن لازم است.

۱۱) شبیه سازی عملکرد حوضه توسعه یافته رود خانه ای به منظور تعیین بهترین ترکیب سدها,کارخانه تولید برق و عملیات آبیاری ,چنانچه بتوان سطح مطلوب مهار سیلاب ها و توسعه منابع آب را تامین کرد.

۱۲) شبیه سازی عملیات خط تولید به منظور تعیین مقدار فضای لازم برای انبار کردن مواد در دست تولید.

شبیه‌سازی، بیان رفتار پویای یک سیستم در حالت پایدار به واسطه حرکت آن از یک وضعیت به وضعیت دیگر بر اساس قواعد عملیاتی تعریف شده است. اصولا در شبیه‌سازی، از کامپیوتر برای ارزیابی عددی یک مدل استفاده شده و در آن داده‌ها به جهت تخمین ویژگی‌های موردنظر مدل جمع‌آوری می‌شوند.

شبیه‌سازی کامپیوتری در عام‌ترین معنایش، فرایند طراحی مدلی ریاضی- منطقی از سیستم واقعی و آزمایش این مدل با کامپیوتر است. فرایند مدل‌سازی با استفاده از روابط ریاضی- منطقی و همچنین اجرای مدل به وسیله کامپیوتر را شبیه‌سازی کامپیوتر می‌گویند.

سیستم و محدودهٔ عمل

یک سیستم گروهی از اشیا است که در راستای تحقق مقصودی معین در چارچوب روابط یا وابستگی‌های متقابل، به یکدیگر پیوسته هستند.

محیط سیستم:

عواملی خارج از سیستم که تحت کنترل نیستند، ولی می‌توانند بر عملکرد سیستم اثر بگذارند محیط سیستم خوانده می‌شود. یک سیستم معمولا تحت تأثیر تغییراتی است که در خارج سیستم اتفاق می‌افتد. این تغییرات اصطلاحا در محیط یا پیرامون سیستم اتفاق می‌افتند. در مدل سازی یک سیستم، تصمیم‌گیری نسبت به مرز بین سیستم و محیط سیستم از نکات ضروری و مهم است.

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

مثالی از سیستم:

عبارت از سیستم تولیدی ساخت خودرو است که در آن ماشین ها ,قطعات و کارگران با هم در امتداد خط مونتاژکار می کنند تا وسیله نقلیه ای با کیفیت بالا تولید شود.هر سیستم اغلب تحت تاثیر تغییراتی قرار می گیرد که خارج از سیستم رخ می دهند. چنین تغییراتی را در پیرامون سیستم بررسی می کنند. بنابراین تعیین مرز بین خود سیستم پیرامون آن ضروری است.

مثلا: در مورد سیستم کارخانه می توان عوامل کنترل کننده ورود سفارش ها را خارج از اختیار کارخانه و در نتیجه بخشی از پیرامون آن به شمار آورد. اما اگر قرار باشد تاثیر عرضه بر تقاضا را در نظر بگیریم، بین محصول کارخانه و ورود سفارش ها رابطه ای وجود خواهد داشت و چنین رابطه ای را باید همانند یکی از فعالیت های سیستم مورد توجه قرار داد.

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

نکته‌ای در تعریف سیستم

اگر عوامل بیرونی به طور جزئی سیستم را تحت تأثیر قرار دهند می‌توان:

- تعریف سیستم را گسترش داد تا عوامل بیرونی را در برگیرد.
- عوامل بیرونی را نادیده گرفت.
- می‌توان عوامل بیرونی را به عنوان ورودی‌های سیستم در نظر گرفت.

اجزاء سیستم

نهاد یا موجودیت (Entity)

عنصری مورد توجه در سیستم است. عناصر موقتی که در سیستم جاری شده و دارای دیمانسیون مشخص هستند.

مشخصه یا خصیصه (Attribute)

ویژگی موجودیت است و آنرا توصیف می‌کند.

فعالیت (Activity)

هر فعالیت بیانگر یک پریود زمانی با طول مشخص است.

وضعیت یا حالت سیستم: (State)

مجموعه متغیرهای لازم برای توصیف سیستم در هر لحظه از زمان با توجه به هدف مطالعه سیستم و معمولا با مقادیر عددی تخصیصی به مشخصه‌های موجودیت ها تعریف می‌شود.

واقعه یا پیشامد (Event)

رویدادی لحظه‌ای است که می‌تواند وضعیت سیستم را تغییر دهد.

مثال

سیستم	نهاد	خصیصه ها	فعالیت	پیشامد	متغیرهای حالت
بانک	مشتری	مانده حساب جاری	سپرده گذاری	ورود، ترک	تعداد خدمت دهنده های مشغول تعداد مشتریان منتظر
قطارسریع اسیر	مسافر	مبدا، مقصد	سفر	ورود به ایستگاه رسیدن به مقصد	تعداد مسافران منتظر در هر ایستگاه تعداد مسافران در سفر
تولید	ماشین ها	سرعت ظرفیت آهنگ از کار ماندگی	جوشکاری، برش	از کارماندگی	وضعیت ماشین ها (مشغول، بیکار، از کار افتاده)
ارتباطات	پیام ها	طول، مقصد	مخابره	ورود به مقصد	تعداد پیام های در انتظار مخابره
موجودی	انبار	ظرفیت	خارج سازی کالا از انبار	تقاضا	سطوح موجودی تقاضای پس افت

مشخصه‌های ثابت و متغیر

مشخصه‌ها توصیف کننده موجودیت‌ها هستند. مقدار یک مشخصه می‌تواند در طول زمان تغییر کند (مشخصه متغیر) و یا تغییر نکند (مشخصه ثابت). معمولا بیشتر علاقمند به مدل کردن مشخصه‌های متغیر هستیم.

مثال هایی از مشخصه‌های متغیر:

تعداد قطعات در خط مونتاژ.

وضعیت یک ماشین (که منجر به درصد استفاده از ماشین می‌شود).

زمان تکمیل مونتاژ

اینکه دکتر مشغول و یا بیکار است.

مثال هایی از مشخصه‌های ثابت:

مسیر تولید یک محصول

توالی مواردی که می‌بایست روی یک مریض با نوع خاصی از درمان صورت گیرد.

مشخصه در خط مونتاژ

موجودیت‌ها	مشخصه‌ها
کارگران	a) وضعیت کاری (بیکار(۰) یا مشغول(۱)) b) ایستگاه‌های کاری تخصیص یافته (۱و ۲و ۳و ...)
ماشین‌آلات	a) وضعیت (بیکار(۰) ، مشغول(۱)، منتظر تعمیر (۲) تحت تعمیر (۳)، در حال راه‌اندازی(۴)) b)) عمر c) زمان عملیات
ایستگاه‌های کاری	a) تعداد قطعات منتظر در صف (۰، ۱، ۲،.....)
محصولات مونتاژی	a) موعد تحویل b) استقرار

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

مدل‌سازی یک اقدام مهم در جهت ایجاد یک نمونه ساده شده از یک سیستم کامل با هدف پیش بینی معیارهای قابل اندازه گیری عملکرد سیستم می باشد.

اصولا یک مدل به منظور گرفتن جنبه های رفتاری خاص از یک سیستم و کسب آگاهی و بینش از رفتار سیستم طراحی می شود.

مدل دقیقاً همانند سیستم واقعی نیست. بلکه تنها شامل تعدادی از جنبه‌های اساسی و کلیدی سیستم است که برای هدف مطالعه سیستم تأثیرگذار هستند.

از این رو مدل خلاصه‌ای از سیستم مورد بررسی است. فرایند ساختن مدل برای افراد متخصص و تصمیم گیرندگان مختلف، روشی اصولی، صریح و موثر را فراهم می‌سازد تا بتوانند قضاوت و ادراک خود را درباره موضوع متمرکز سازند. همچنین با معرفی چارچوبی دقیق، مدل را می‌توان به عنوان ابزاری موثر در برقرار کردن ارتباط به عنوان کمک در کار تفکر روی موضوع به کار برد.

روش صحیح مدل‌سازی

شروع با مدلی بسیار ساده

تکمیل تدریجی مدل

به منظور ایجاد مدلی مفید از یک فرایند دو مرحله‌ای استفاده می‌شود.

تجزیه: ساده کردن سیستم از طریق حذف جزئیات یا از طریق پذیرش فرض هایی است که روابط حاکم بر عوامل را مهارپذیر می‌کند. عمل ساده کردن عموما منجر به موارد زیر می شود:

- تبدیل متغیرها به مقادیر ثابت
- حذف یا ادغام متغیرها در یکدیگر
- فرض خطی بودن روابط
- افزودن محدودیت‌های بیشتر

ترکیب

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

مدل فیزیکی

یک شئ فیزیکی ساده شده با مقیاس کوچک شده می باشد. (مانند مدل هواپیما)

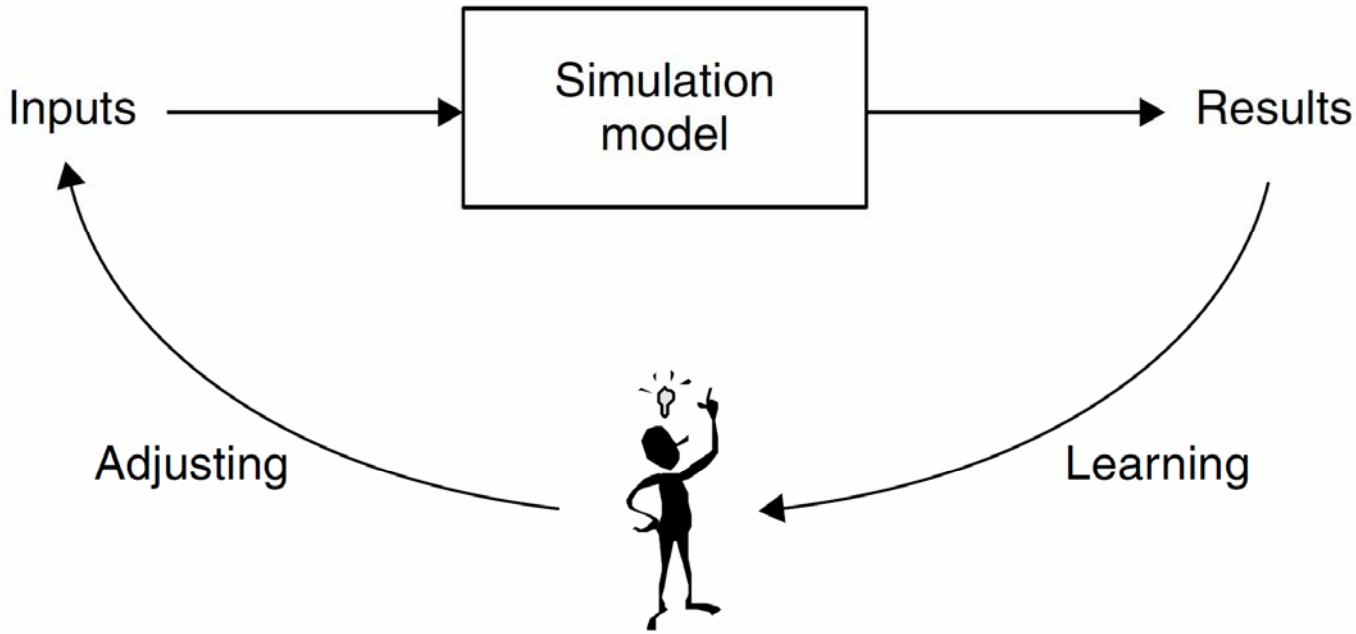
مدل تحلیلی یا ریاضی

مجموعه ای از معادلات و ارتباطات میان متغیرهای ریاضیاتی می‌باشد. (مانند مجموعه ای از معادلات که توصیف کننده جریان کاری در خط تولید در کارخانه می‌باشد)

مدل کامپیوتری (شبیه‌سازی)

شرح برنامه‌ای از سیستم می‌باشد.

شبیه سازی به عنوان یک سیستم



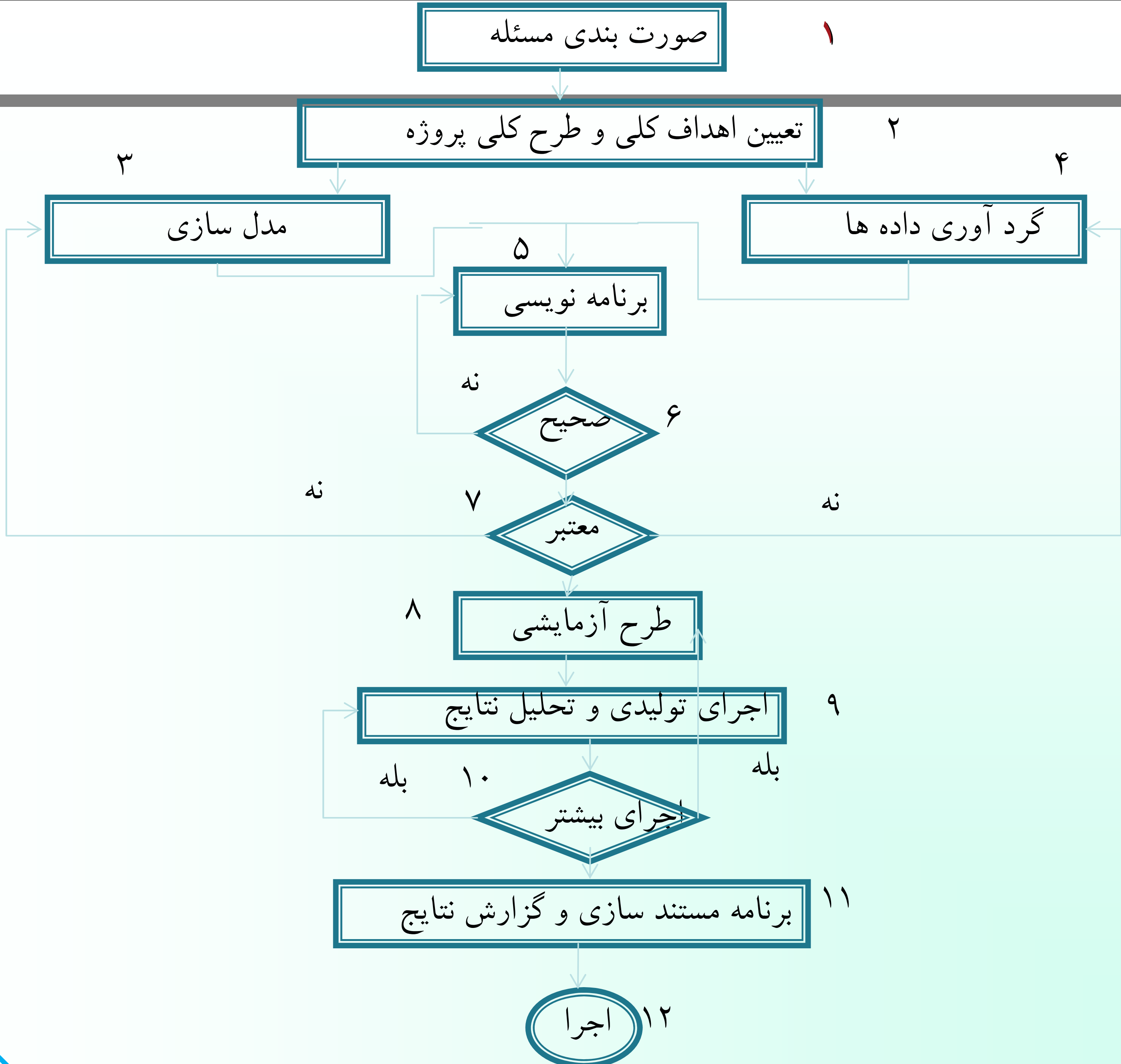
Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

کامپیوتر داده‌های موردنظر در ارتباط با موجودیت های شبیه‌سازی شده را ثبت کرده و یک نمونه ترکیبی از داده‌های عملکردی سیستم را ایجاد می‌کند. سپس مفاهیم آماری برای تحلیل این نمونه داده‌ها در ارتباط با کمیت های مختلفی چون موارد زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

- زمان های انتظار
- توان عملیاتی
- طول صف
- زمان های پردازش
- میزان استفاده از منابع ....

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

۱. فرموله‌بندی و تعریف مساله
۲. تعیین اهداف و طرح کلی پروژه
۳. تحلیل مسئله
۴. جمع آوری داده اطلاعات
۵. ساخت مدل
۶. ممیزی مدل
۷. معتبرسازی مدل
۸. طراحی و اجرای آزمایش های شبیه سازی.
۹. تحلیل خروجی
۱۰. تفسیر و مستندسازی
۱۱. اجراء



۱
صورت بندی مسئله
۲
تعیین اهداف کلی و طرح کلی پروژه
۳
مدل سازی
۴
گرد آوری داده ها
۵
برنامه نویسی
نه
۶
صحیح
نه
۷
معتبر
نه
۸
طرح آزمایشی
۹
اجرای تولیدی و تحلیل نتایج
بله
۱۰
بله
اجرای بیشتر
۱۱
برنامه مستند سازی و گزارش نتایج
اجرا
۱۲

- Discrete Event System Simulation

- Continuous System Simulation

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

شبیه‌سازی سیستم‌های گسسته پیشامد

Discrete Event System Simulation

شبیه‌سازی سیستمی که متغیرهای حالت آن فقط و فقط در نقاط گسسته‌ای از زمان "در لحظه وقوع رویداد" اتفاق بیفتد را شبیه‌سازی سیستم‌های گسسته پیشامد می‌نامند. در حقیقت وضعیت چنین سیستمی در لحظه‌های گسسته ای از زمان به روز رسانی می‌شود.

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

مثال‌هایی برای تولید، مراکز خدماتی و حمل و نقل

یک کارخانه تولیدی به همراه ماشین ها، پرسنل، وسایل حمل و نقل و فضاهای انبار

یک بانک با انواع مختلف مشتریان، خدمت دهندگان و تسهیلات نظیر پنجره‌های پاسخگویی، ماشین‌های ATM، پرداخت وام و ...

یک شبکه توزیع کالا از کارخانجات، انبارها و شبکه‌های حمل و نقل

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

شبیه‌سازی در یک مثال سیستمی

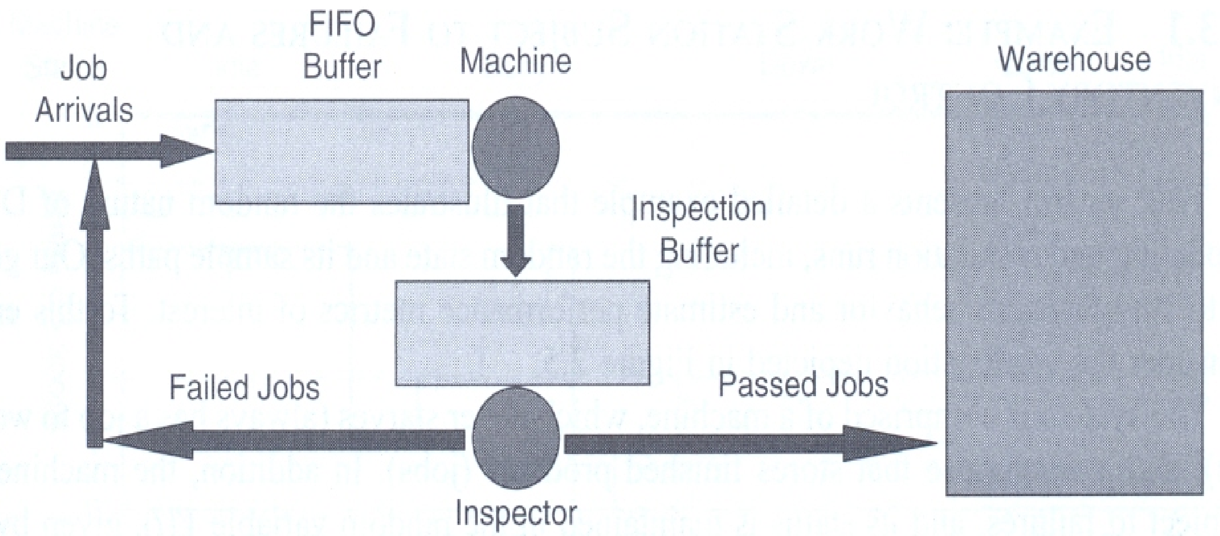


Figure 2.4 A single FIFO machine with inspection and storage.

شبیه‌سازی سیستم‌هایی با خصوصیت تصادفی

می‌توان چنین گفت که اکثر سیستم های موجود معرفی شده خاصیت تصادفی بودن را با خود به همراه دارند. منظور از این جمله این است که؛ سیستم‌ها همواره عملکرد یکسانی ندارند. همین امر باعث می شود با توجه به نظریه های آماری خصوصیت تصادفی بودن را برای سیستم‌ها فرض صحیحی دانست. در این درس با شناسایی خصوصیت تصادفی آماری جامعه مورد بررسی، با استفاده از تکنیک‌های آماری، به شبیه‌سازی سیستم ها برای مطالعه وضعیت در حالت پایدار سیستم می‌پردازیم.

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

تعریف

روشی است که در آن به منظور حل مسایل غیر تصادفی یا برخی مسایل تصادفی که گذشت زمان هیچ نقش اساسی در آنها ندارد از اعداد تصادفی (اعداد تصادفی یکنواخت در بازه صفر تا یک) استفاده می‌شود.

تاریخچه

در خلال جنگ جهانی دوم از رمز مونت کارلو که تعریفی مطابق بالا دارد برای حل مسائلی در ساخت بمب اتمی استفاده شده است.

تکنیک تابع توزیع

تکنیک تبدیل یک متغیره

تکنیک تبدیل چند متغیره

تکنیک تابع مولد گشتاور

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

در این درس شبیه‌سازی با روش مونت کارلو انجام می‌شود

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

نرم افزارهای شبیه‌سازی

پیچیده بودن شبیه‌سازی سیستم‌های واقعی، استفاده از نرم‌افزارهای کامپیوتری را باعث می‌شود. در اصل نرم‌افزار کامپیوتری چارچوبی را برای ساخت مدل فراهم می‌کنند که کار مدل‌ساز را نسبت به موارد زیر راحت می‌کنند:

- چگونگی پردازش ورودی‌ها
- عملیات ثبت داده‌ها
- گزارش‌های خروجی
- تسهیل در تولید داده‌های تصادفی
- جمع کردن داده‌ها در متغیرهای خروجی

Software	Supplier
Arena	Rockwell Software
AutoMod	Brooks-PRI Automation
Awe Sim	Frontstep, Inc.
Enterprise Dynamics	Incontrol Enterprise Dynamics
Extend	Imagine That, Inc.
Flexsim	Flexsim Software Products, Inc.
GPSS/H	Wolverine Software Corporation
Micro Saint	Micro Analysis and Design
ProModel (MedModel, ServiceModel)	ProModel Corporation
Quest	DELMIA Corporation
ShowFlow	Webb Systems Limited
SIGMA	Custom Simulation
Simprocess	CACI Products Company
Simul8	Visual8 Corporation
SLX	Wolverine Software Corporation
Visual Simulation Environment	Orca Computer, Inc.
Witness	Lanner Group, Inc.

فصل دوم

مثال‌هایی از شبیه‌سازی

شبیه سازی صف: ما در کل سیستم بدون صف در شبیه سازی نداریم و سیستم صف بعنوان بهترین عنصر سیستم های واقع گسسته می باشد (صف نانوایی)

نماد صف در ریاضیات شش ایتم دارد که عبارتند از :

M	M	۱	FCFC	∞	∞
1	2	3	4	5	6
Arrival rate nature	**Service time**	**Number of parallel servers** تعداد سرویس دهنده های موازی	**Queueing method** دستیابی	**Capacity** ظرفیت صف	**Population** جمعیت

Arrival rate nature:
- معین
- تصادفی
  - تابع توزیع یکنواخت
  - تابع توزیع پواسون

Service time:
- معین
- تصادفی

توضیح شکل ۱منظور از M یعنی اینکه نرخ ورودی تصادفی بوده و دارای توزیع گسست های از نوع بدون حافظه است.(از توزیع پواسون استفاده می شود)

توضیح شکل ۲ مدت زمان سرویس هر نهاد تصادفی بوده و دارای تابع توزیع پیوسته ای از نوع معمولا مارکوین است.

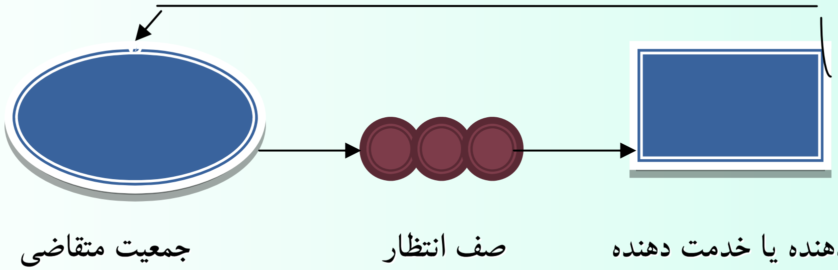
توضیح شکل ۳ تعداد سرویس دهنده ها را مشخص می کند . ما در سیستم صف سرویس دهنده های سری نداریم.

توضیح شکل ۴ FCFS روش نوبت دهی و SJF.....

توضیح شکل ۵ ∞ ظرفیت سرور یا سیستم در اینجا مشخص می شود.

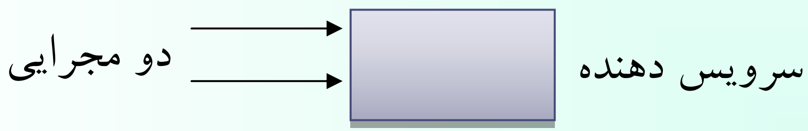
توضیح شکل ۶ ∞ جمعیت به صورت DEFAULT بی نهایت است.در حقیقت مقدار جمعیت شبیه سازی شده را می نماید.

شبیه سازی سیستم های صف: سیستم صف با جمعیت متقاضی و چگونگی ورود و خدمت دهی و ظرفیت سیستم و نظام صف به این صورت مشخص می شود.



در این سیستم جمعیت متقاضی نامحدود است. یعنی اگر یک نفر جمعیت متقاضی را ترک کند و صف انتظار ملحق شود ,یا به به محل دریافت خدمت برود,هیچ گونه تغییری در آهنگ ورود سایر متقاضیان نیازمند خدمت روی نخواهد داد.

بین خدمت دهنده ها ارتباط وجود ندارد.



نکته ۱: برای هر ورود به خدمت دهنده یک باریکی ($\longmapsto$) در نظر گرفته می شود . و این در سیستم ورودی هر باریکی به صورت تصادفی رخ خواهد داد.

نکته ۲: در صورتی که جمعیت مکانی بتواند به صف انتظار ملحق شود سرانجام خدمت دریافت خواهد کرد.

نکته ۳: مدت های خدمت دهی، تصادفی است و در قالب توضیع احتمالی تعیین می شوند و با گذشت زمان بدون تغییر می ماند.

نکته ۴: ظرفیت سیستم (جمعیت متقاضی + جمعیت صف)، نامحدود است.

ظرفیت صف = صف انتظار

نکته ۵: هر متقاضی با یک ترتیبی (اغلب Fifo یا Fsfs) فقط از یک خدمت دهنده یا مجرا، خدمت می گیرد.

نکته ۶: ورودها و خدمت دهی ها ,با توضیع های مدت بین دو ورود و مدت های خدمت دهی مشخص می شود و به طورکلی آهنگ موثر ورود باید از ماکزیمم (MAX)آهنگ خدمت دهی کمتر باشد. به دلیل طول صف انتظار به طور نامحدود افزایش پیدا نکند. هرگاه صف ها به طور نامحدود رشد کنند، آنها را انفجار آمیز یا ناپایدار می نامند.

برای شبیه سازی سیستم های صف , درک مفاهیم حالت سیستم و پیشامد ها و ساعت شبیه سازی لازم است.

State یا حالت سیستم : تعداد حاضران در سیستم و وضعیت خدمت دهنده از لحاظ مشغول بودن یا بیکار است.

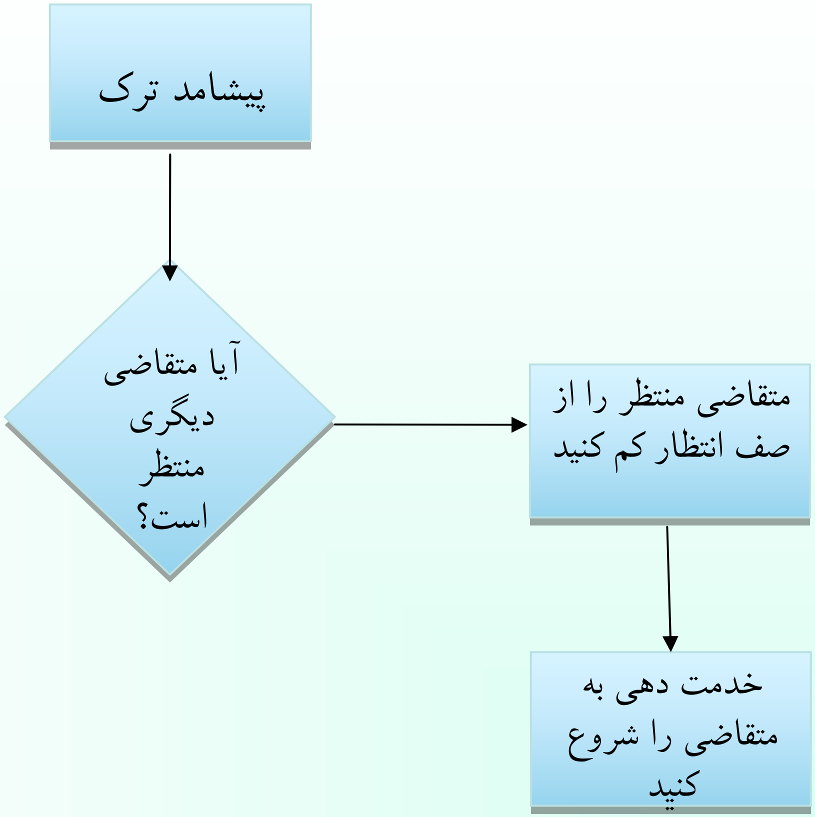
پیشامد : مجموعه شرایطی است که موجب تغییر لحظه ای در حالت سیستم می شود.

در مسئله تک مجرایی صف، تنها دو پیشامد ممکن است حالت سیستم را تغییر دهد:

۱)پیشامد ورود یک واحد

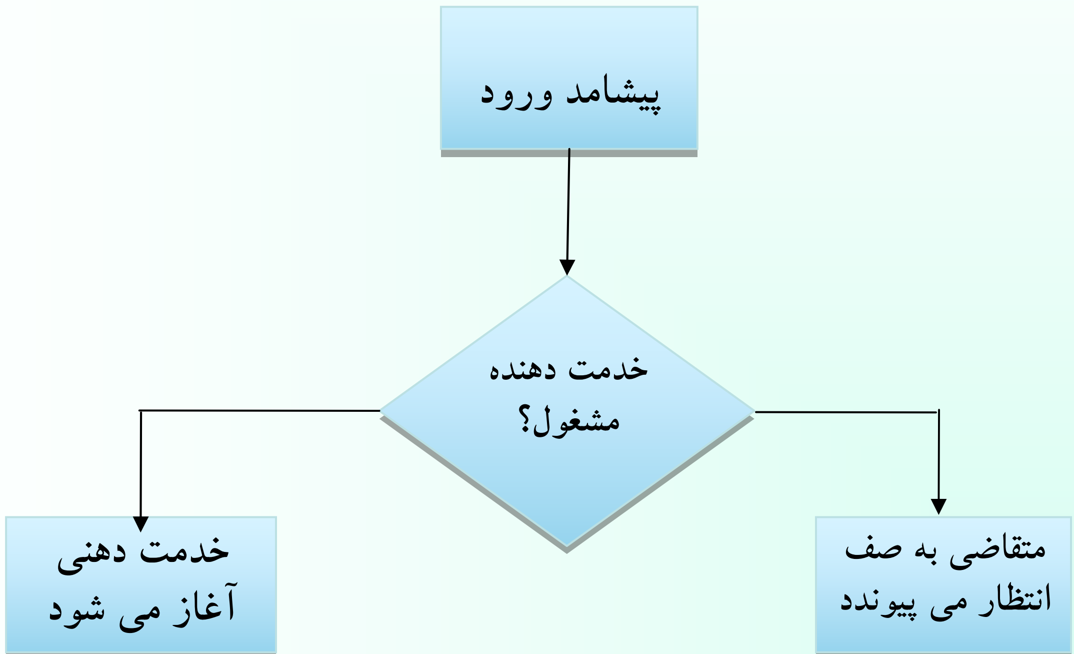
۲)پیشامد تکمیل خدمت دهی به یک واحد است.

اگر خدمت دهی تازه تکمیل شده باشد، شبیه سازی طبق شکل زیر ادامه پیدا می کند.



((دیاگرام جریانی مربوط به خدمت دهی تازه تکمیل شده))

برای تولید اعداد تصادفی پروژه از روش هم نهشتی خطی استفاده می کنیم.
مطابق دیاگرام صفحه قبل ,خدمت دهنده تنها در ۲ وضعیت دارد: یا مشغول است و یا بیکار است.
پیشامد دوم: هنگامی روی می دهد که یک متقاضی به سیستم وارد شود. دیاگرام این مورد را در شکل زیر می بینید:



((دیاگرام جریان ورود به سیستم))

طبق دیاگرام بالا ، متقاضی وارد شده ممکن است خدمت دهنده را بی کار و یا مشغول بیابد . بنابراین یا بر خدمت دهنده وارد می شود یا به صف انتظار ملحق می شود.
اقدام مقتضی در مورد متقاضی مطابق شکل زیر می باشد:

		وضعیت صف	
		خالی	غیر خالی
وضعیت خدمت دهنده	مشغول	ورود به صف	ورود به صف
	بیکار	شروع خدمت دهی	غیر ممکن

((عملیات متصور به هنکام ورود یک متقاضی))

طبق جدول بالا، اگر خدمت دهنده مشغول باشد ,و متقاضی به صف وارد می شود و اگر خدمت دهنده بیکار وصف خالی باشد , متقاضی به خدمت دهنده وارد می شود.این امر غیر ممکن است که خدمت دهنده بیکار و صف غیر خالی باشد.

با کامل کردن خدمت دهی ممکن است خدمت دهنده بیکار شود یا با خدمت دهی به متقاضی بعدی، هم چنان مشغول بماند. شکل زیر وضعیت خدمت دهی را نشان می دهد:

وضعیت صفت			
خالی	غیر خالی		
نامکن		مشغول	وضعیت
	نامکن	بیکار	خدمت دهنده

"وضعیت خدمت دهنده پس از تکمیل خدمت دهی"

معرفی عامل تصادف برای شبیه سازی صف، برای تقلید زندگی واقعی با استفاده از اعداد تصادفی و در فاصله بازه (۰,۱) امکان پذیر است. همچنین در تولید اعداد تصادفی می توان با کنار هم قرار دادن ارقام تصادفی به تعداد مناسب به مقصود رسید. ما در این درس برای تولید اعداد تصادفی از روش هم نهشتی خطی و به کمک هسته زمان سیستم، عمل شبیه سازی را انجام خواهیم داد.

مثال: **برای شبیه سازی سیستم صف:** فروشگاهی را در نظر بگیرید که در آن مشتریان به طور تصادفی وارد فروشگاه می شوند. طبق جدول یک مجموعه ۵ مدت بین ورود تولید شده برای محاسبه زمان های ورود ۶ مشتری به سیستم صف شبیه سازی شده است:

شبیه سازی از ورود

اولین مشتری شروع می شود. دو تا هسته باید تنظیم شود: یکی برای ورود مشتری و دوم مدت های خدمت دهی است.

طبق جدول زیر مدت های خدمت دهی برای مشتری مشخص شده است.

زمان های ورود بر حسب ساعت شبیه سازی	مدت بین دو ورود	مشتری
۰	-	۱
۲	۲	۲
۶	۴	۳
۷	۱	۴
۹	۲	۵
۱۵	۶	۶

((جدول مدت های بین ورود و زمان های ورود))

مدت خدمت دهی	مشتری
۲	۱
۱	۲
۳	۳
۲	۴
۱	۵
۴	۶

((مدت خدمت دهی))

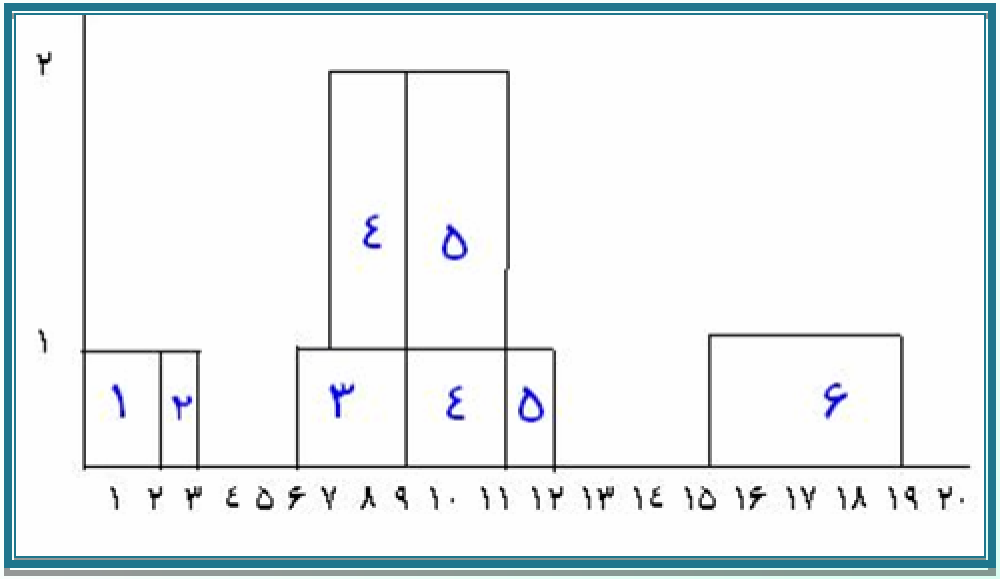
در جدول زیر، شبیه سازی سیستم فروشگاه با تاکید بر اینکه، زمان ها بر اساس ساعت شبیه سازی باشد، انجام شده است:

مشتری	زمان ورود	زمان شروع خدمت دهی	مدت خدمت دهی	زمان پایانی خدمت دهی
۱	۰	۰	۲	۲
۲	۲	۲	۱	۳
۳	۶	۶	۳	۹
۴	۷	۹	۲	۱۱
۵	۹	۱۱	۱	۱۲
۶	۱۵	۱۵	۴	۱۹

ترتیب زمانی پیشامد ها طبق جدول زیر می باشد:

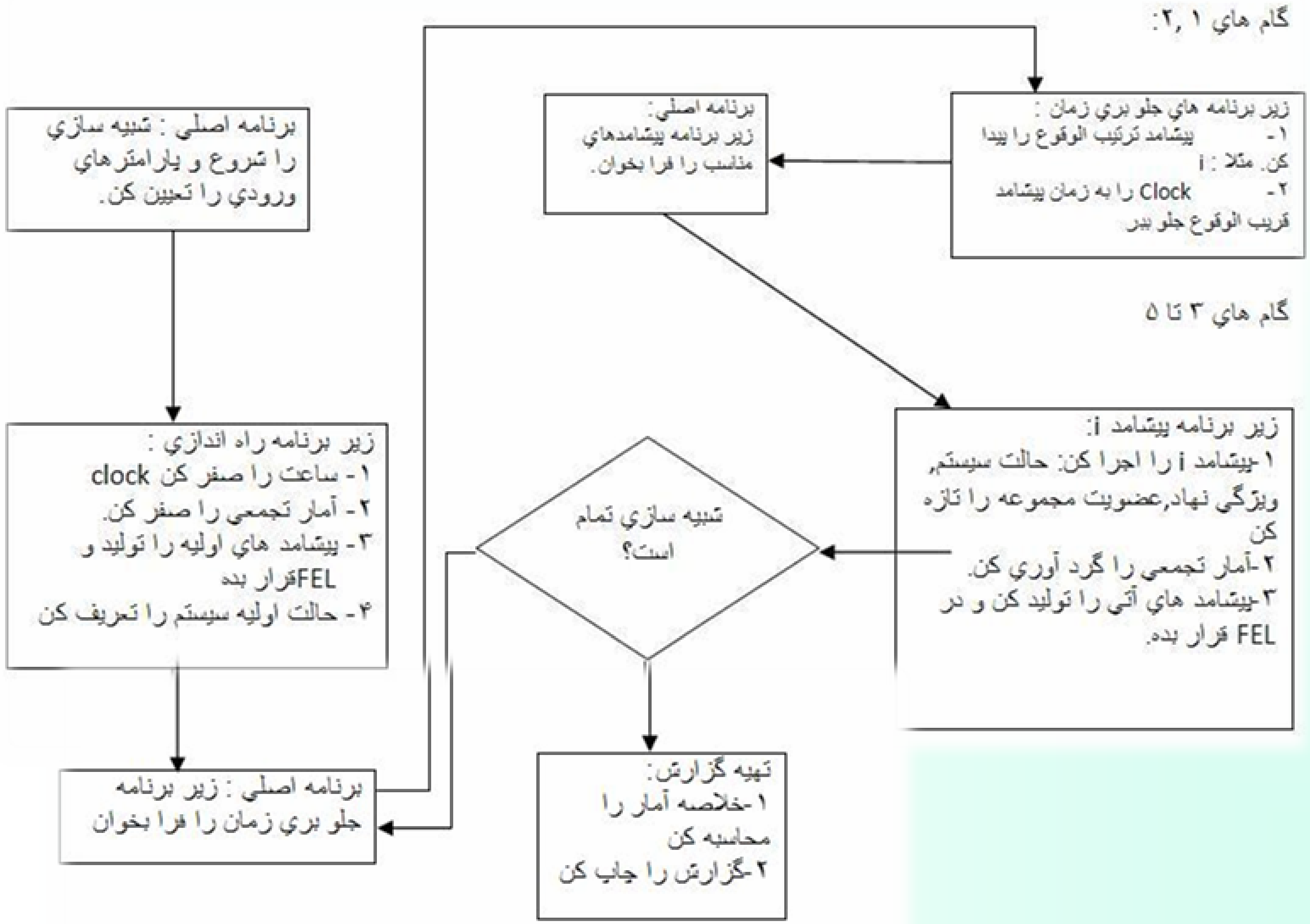
نوع پیشامد	مشتری	ساعت شبیه سازی
ورود	۱	۰
ترک	۱	۲
ورود	۲	۲
ترک	۲	۳
ورود	۳	۶
ورود	۴	۷
ترک	۳	۹
ورود	۵	۹
ترک	۴	۱۱
ترک	۵	۱۲
ورود	۶	۱۵
ترک	۶	۱۹

نمودار زیر، تعداد مشتری حاضر در سیستم را در زمان های مختلف شبیه سازی نشان می دهد:



ساعت شبیه سازی

شبیه سازی با دید زمان بندی پیشامد ها : ساختار کلی الگوریتم زمان بندی پیشنهادها به صورت زیر است:



((ساختار كلي برنامه شبيه سازي با ديد زمان بندي پيشامدها))

FLV : لیست پیشامد ها است . پیشامدهایی که به آنها سرویس داده شده است. لیست پیشامدها آتی آماده برای سرویس.

پیشامد قریب الوقوع یا (IMEVT): پیشامدی که انتخاب می شود برای سرویس دادن مثل روش FcFs

مثال صف تک مجرایی : یک فروشگاه بزرگ مواد غذایی را در نظر بگیرید که تنها یک باجه صندوق دارد. مشتری ها به طور تصادفی با فواصل زمانی بین ۱ تا ۸ دقیقه به صندوق مراجعه می کنند.(زمان بین دو مورد). هر مقدار ممکن برای مدت ورود احتمالی یکسان برای رخ دارد. مدت های خدمت دهی از یک تا ۶ دقیقه و طبق جدول زیر می باشد:

جدول ۱) :توزیع مدت های بین دو ورود را نشان می دهد و

جدول ۲) : توزیع مدت های خدمت دهی را نشان می دهد:

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

مدت های بین ورود (دقیقه)	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۱	٪۱۲۵	٪۱۲۵	۰۰۱-۱۲۵
۲	٪۱۲۵	٪۲۵۰	۱۲۶-۲۵۰
۳	٪۱۲۵	٪۳۷۵	۲۵۱-۳۷۵
٤	٪۱۲۵	٪۵۰۰	۳۷٦-۵۰۰
۵	٪۱۲۵	٪٦۲۵	۵۰۱-٦۲۵
٦	٪۱۲۵	٪۷۵۰	٦۲٦-۷۵۰
۷	٪۱۲۵	٪۸۷۵	۷۵۱-۸۷۵
۸	٪۱۲۵	۱/۰۰۰	۸۷٦-۱۰۰۰
-	-	-	-

((جدول ۱: توزیع مدت های ورود)) یک هسته

مدت خدمت دهی (دقیقه)	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۱	٪۱۰	٪۱۰	۰۱-۱۰
۲	٪۲۰	٪۳۰	۱۱-۳۰
۳	٪۳۰	٪٦۰	۳۱-٦۰
٤	٪۲۵	٪۸۵۸	٦۱-۸۵
۵	٪۱۰	٪۹۵	۸۵-۹۵
٦	٪۵	۱/۰۰	۹٦-۱۰۰
-	-	-	-

((جدول ۲ : توضیح مدت های خدمات دهی))

هسته دیگر

- آمار تجمعی:برای تعیین بازه است

با ورودی های جدول ۱ و جدول ۲، ما می توانیم شبیه سازی را با الگوریتم شبیه سازی با دید زمان بندی و بارش آمار تجمعی، انجام دهیم. به عنوان مثال: در جدول زیر، شبیه سازی را برای ۲۰ مشتری مطابق جدول زیر انجام داده ایم. در این مثال دو بار هسته عدد تصادفی تنظیم می شود. یکبار برای تعیین مدت های بین دو ورود که در این مرحله ۱۹ عدد تصادفی کافی است زیرا اولین ورود طبق فرض شبیه سازی در زمان صفر رخ می دهد و هسته دوم برای مدت تولید شده برای خدمت دهی است.

مشتری	ارقام تصادفی	مدت بین دو ورود (دقیقه)	مشتری	ارقام تصادفی	مدت بین دو ورود (دقیقه)
۱	-	-	۱۱	۱۰۹	۱
۲	۹۱۳	۸	۱۲	۹۳	۱
۳	۷۲۵	۶	۱۳	۶۰۷	۵
۴	۰۱۵	۱	۱۴	۷۳۸	۶
۵	۹۴۸	۸	۱۵	۳۹۵	۳
۶	۳۰۹	۳	۱۶	۸۸۸	۸
۷	۹۲۲	۸	۱۷	۱۰۶	۱
۸	۷۵۳	۷	۱۸	۲۱۲	۲
۹	۲۳۵	۲	۱۹	۴۹۳	۴
۱۰	۳۰۲	۳	۲۰	۵۳۵	۵

((جدول تعیین مدت های بین دو ورود))

مشتری	ارقام تصادفی	مدت خدمت دهی (دقیقه)	مشتری	ارقام تصادفی	مدت بین دو ورود (دقیقه)
۱	۸٤	٤	۱۱	۳۲	۳
۲	۱۰	۱	۱۲	۹٤	۵
۳	۷٤	٤	۱۳	۷۹	٤
٤	۵۳	۳	۱٤	۰۵	۱
۵	۱۷	۲	۱۵	۷۹	۵
٦	۷۹	٤	۱٦	۸٤	٤
۷	۹۱	۵	۱۷	۵۲	۳
۸	٦۷	٤	۱۸	۵۵	۳
۹	۸۹	۵	۱۹	۳۰	۲
۱۰	۳۸	۳	۲۰	۵۰	۳

((جدول مدت های تولید شده برای خدمت دهی))

مشتری	مدت سپری شده از آخرین ورود (دقیقه)	زمان ورود	مدت خدمت دهی (دقیقه)	زمان شروع خدمت	مدت ماندن مشتری در صف (دقیقه)	زمان پایان خدمت	مدت ماندن مشتری در سیستم (دقیقه)	مدت بیکاری خدمت دهنده (دهنده)
۱	-	۰	۴	۰	۰	۴	۴	۰
۲	۸	۸	۱	۸	۰	۹	۱	۴
۳	۶	۱۴	۴	۱۴	۰	۱۸	۴	۵
۴	۱	۱۵	۳	۱۸	۳	۲۱	۶	۰
۵	۸	۲۳	۲	۲۳	۰	۲۵	۲	۲
۶	۳	۲۶	۴	۲۶	۰	۳۰	۴	۱
۷	۸	۳۴	۵	۳۴	۰	۳۹	۵	۴
۸	۷	۳۴	۵	۳۴	۰	۳۹	۵	۴
۹	۲	۴۳	۵	۴۵	۲	۵۰	۷	۰
۱۰	۳	۴۶	۳	۵۰	۴	۵۳	۷	۰
۱۱	۱	۴۷	۳	۵۳	۶	۵۶	۹	۰
۱۲	۱	۴۸	۵	۵۶	۸	۶۱	۱۳	۰
۱۳	۵	۵۳	۴	۶۱	۸	۶۵	۱۲	۰
۱۴	۶	۵۹	۱	۶۵	۶	۶۶	۷	۰
۱۵	۳	۶۲	۵	۶۶	۴	۷۱	۹	۰
۱۶	۸	۷۰	۴	۷۱	۱	۷۵	۵	۰
۱۷	۱	۷۱	۳	۷۵	۴	۷۸	۷	۰
۱۸	۲	۷۳	۳	۷۸	۵	۸۱	۸	۰
۱۹	۴	۷۷	۲	۸۱	۴	۸۳	۶	۰
۲۰	۵	۸۲	۳	۸۳	۱	۸۶	۴	۰
		۸۲	۶۸		۵۶	۸۶	۱۲۴	sum: ۱۸

با توجه به جدول صفحه و قبل شبیه سازی برای ۲۰ مشتری اجرا شد . برخی از نتایج این شبیه سازی عبارتنداز:

۱) متوسط مدت انتظار هر مشتری در صف را حساب کنید؟

۲.۸ = ۲۰ / ۵۶ = تعدادمشتری ها / مجموع مدت زمان ماندن مشتریها در صف =متوسط مدت انتظار هر مشتری در صف

۲) احتمال مجبور شدن هر مشتری به انتظار کشیدن در صف چقدر است؟

۶۵٪ =۱۳/۲۰ = تعداد کل مشتریان / مجموع تعداد مشتریانی که در صف مانده اند=متوسط احتمال ماندن هر مشتری در صف انتظار

۳) احتمال نماندن مشتری در صف انتظار؟

روش الف) $\%۳۵ = ۷ / ۲۰ =$ تعداد کل مشتریان / تعداد مشتریانی که در صف نمانده اند = احتمال نمایندن مشتری در صف انتظار

روش ب) مکمل تعداد نفراتی که در صف مانده اند : $\%۳۵ = ۱-۰/۶۵$

۴) نسبت مدت بیکاری خدمت دهنده را حساب کنید؟

مجموع مدت شبیه سازی/مجموع مدت های بیکاری خدمت دهنده =مدت بیکاری خدمت دهنده $=۱۸/۸۶=۰/۲۰۹۳$

۵) متوسط مدت خدمت دهنی چقدر است؟

مجموع تعداد مشتریان / مجموع مدت خدمت دهی = متوسط خدمت دهی $= ۶۸ / ۲۰ = ۴.۳$

۶) متوسط مدت بین دو ورود چقدر است؟

تعداد ورود ها منهای یک مجموع تمام مدت های بین دو ورود = متوسط مدت بین دو ورود

= ۸۲ / ۲۰-۱ = ۸۲ / ۱۹ =۴.۳دقیقه

نکته: می توان نتیجه متوسط مدت بین دو ورود را با یافتن میانگین توضیع یکنواخت گسسته ای که نقاط شروع ونقاط پایان است را مقایسه کرد

(a) = (a+b) / ۲ = ۱+۸ / ۲ =۴.۵

نزیک تر شود یا میل کند .

۷) متوسط مدت انتظار مشتریانی که به انتظار می ماند؟

مجموع تعداد مشتریانی که در صف به انتظار می ماند / مجموع مدتی که مشتریان در صف به انتظار می مانند = متوسط مدت انتظار مشتریان که به انتظار می مانند

= ۵۶ / ۱۳ =۴/۳۰۷۶۹

۸)متوسط مدتی که هر مشتری در سیستم می گذراند؟

روش الف)

تعداد کل مشتریان/مجموع مدت ماندن مشتریان در سیستم=متوسط مدتی که هر مشتری در سیستم می گذراند

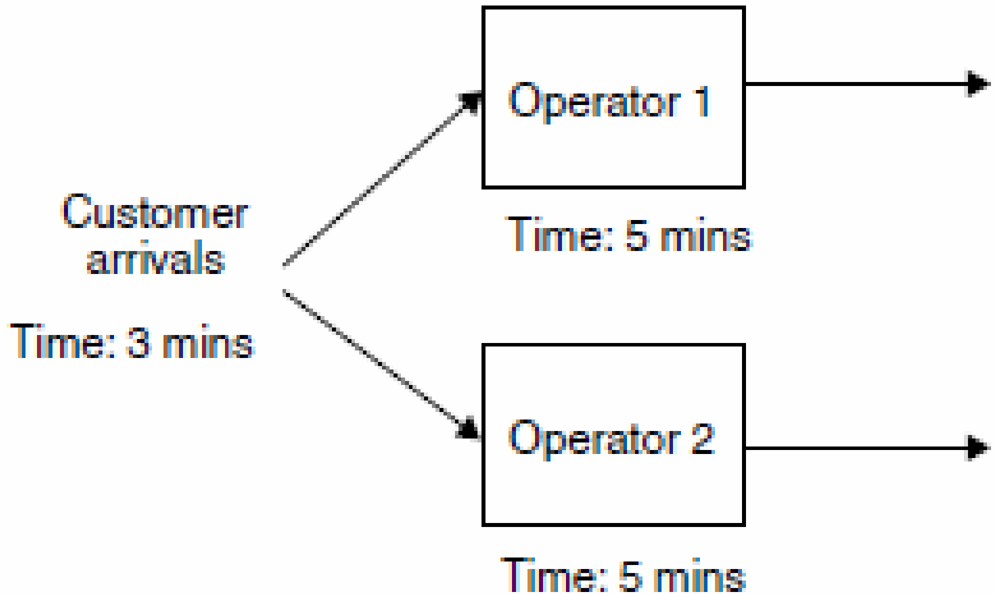
۱۲۴/۲۰=۶.۲

روش ب)متوسط مدتی که مشتریان در صف به انتظار می مانند +متوسط مدتی که مشتری برای خدمت گیری صرف می کند.

۲,۸+۴.۳=۶.۲

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

شروع با یک مثالی ساده

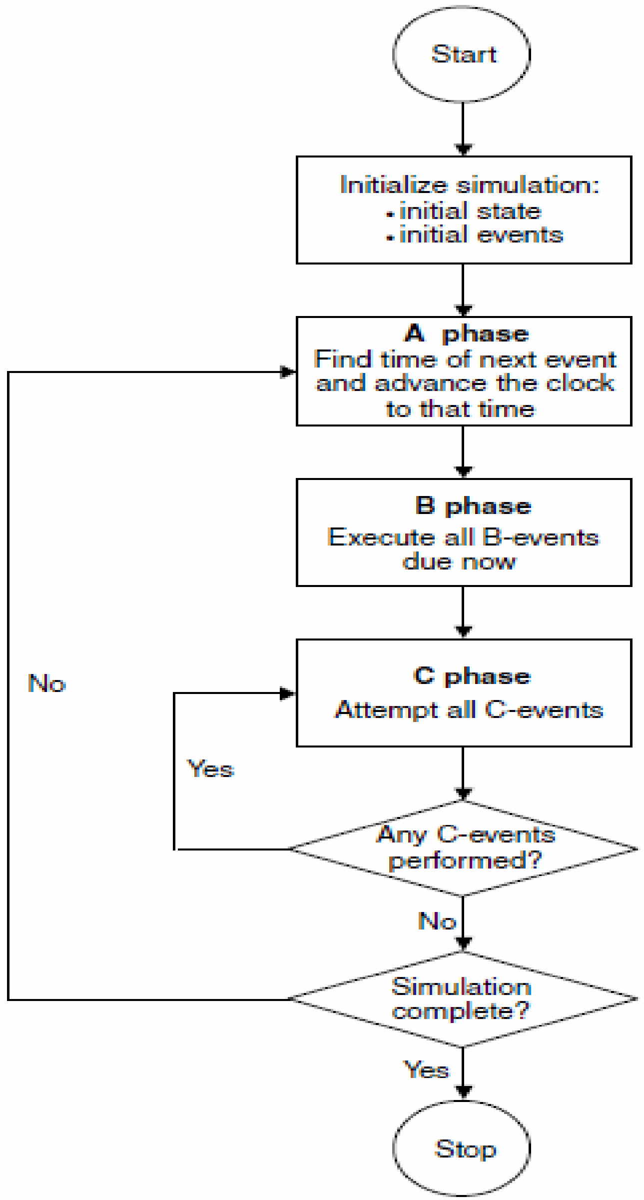


Time	Call arrival	Operator 1	Operator 2
0	3		
1	2		
2	1		
3	3	5	
4	2	4	
5	1	3	
6	3	2	5
7	2	1	4
8	1		3
9	3	5	2
10	2	4	1
11	1	3	
12	3	2	5
13	2	1	4
14	1		3
15	3	5	2
16	2	4	1
17	1	3	
18	3	2	5
19	2	1	4
20	1		3
21	3	5	2
22	2	4	1
23	1	3	
24	3	2	5
Completed calls		3	3

The discrete-event simulation approach

Time	Event
3	Customer arrives
	Operator 1 starts service
6	Customer arrives
	Operator 2 starts service
8	Operator 1 completes service
9	Customer arrives
	Operator 1 starts service
11	Operator 2 completes service
12	Customer arrives
	Operator 2 starts service
14	Operator 1 completes service
15	Customer arrives
	Operator 1 starts service
17	Operator 2 completes service
18	Customer arrives
	Operator 2 starts service
20	Operator 1 completes service
21	Customer arrives
	Operator 1 starts service
23	Operator 2 completes service
24	Customer arrives
	Operator 2 starts service

The three phase simulation approach



Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

شبیه‌سازی دستی برای مثال

صف با دو خدمت دهنده

یک رستوران را با دو تحویل (هابیل و خباز) دهنده غذا به مشتریان در نظر بگیرید. هنگام ورود سفارش جدید به رستوران هر خدمت دهنده که بیکار باشد کار را انجام می‌دهد و در زمانی که هر دو بیکارند هابیل به دلیل تجربه بیشتر در این امر سفارش دهی به مشتریان را به عهده می گیرد. با توجه به این که زمان خدمت هر خدمت دهنده و زمان ورود متوالی مشتریان دارای توزیع احتمالی مشخص است سیستم فعلی را تحلیل کنید.

توزیع مدت های بین سفارش مشتریان

مدت بین دو سفارش	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۱	۰,۲۵	۰,۲۵	۰۱-۲۵
۲	۰,۴	۰,۶۵	۲۶-۶۵
۳	۰,۲	۰,۸۵	۶۶-۸۵
۴	۰,۱۵	۱	۸۶-۰۰

توزیع خدمت‌دهی هابیل

مدت خدمت‌دهی	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۲	۰,۳	۰,۳	۰۱-۳۰
۳	۰,۲۸	۰,۵۸	۳۱-۵۸
۴	۰,۲۵	۰,۸۳	۵۹-۸۳
۵	۰,۱۷	۱	۸۴-۰۰

توزیع خدمت دهی خباز

مدت خدمت‌دهی	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۳	۰,۳۵	۰,۳۵	۰۱-۳۵
۴	۰,۲۵	۰,۶	۳۶-۶۰
۵	۰,۲	۰,۸	۶۱-۸۰
۶	۰,۲	۱	۸۱-۰۰

خلاصه نتایج شبیه‌سازی مسأله رستوران

مشتری	ارقام تصادفی ورود	مدتهای بین دو ورود	زمانهای ورود برحسب ساعت شبیه‌سازی	ارقام تصادفی خدمتدهی	هابیل			خباز			مدت انتظار در صف
					زمانهای شروع خدمت	مدتهای خدمتدهی	زمانهای پایان خدمت	زمانهای شروع خدمت	مدتهای خدمتدهی	زمانهای پایان خدمت	
۱	–	–	۰	۹۵	۰	۵	۵				۰
۲	۲۶	۲	۲	۲۱				۲	۳	۵	۰
۳	۹۸	۴	۶	۵۱	۶	۳	۹				۰
۴	۹۰	۴	۱۰	۹۲	۱۰	۵	۱۵				۰
۵	۲۶	۲	۱۲	۸۹				۱۲	۶	۱۸	۰
۶	۴۲	۲	۱۴	۳۸	۱۵	۳	۱۸				۱
۷	۷۴	۳	۱۷	۱۳	۱۸	۲	۲۰				۱
۸	۸۰	۳	۲۰	۶۱	۲۰	۴	۲۴				۰
۹	۶۸	۳	۲۳	۵۰				۲۳	۴	۲۷	۰
۱۰	۲۲	۱	۲۴	۴۹	۲۴	۳	۲۷				۰
۱۱	۴۸	۲	۲۶	۳۹	۲۷	۳	۳۰				۱
۱۲	۳۴	۲	۲۸	۵۳				۲۸	۴	۳۲	۰
۱۳	۴۵	۲	۳۰	۸۸	۳۰	۵	۳۵				۰
۱۴	۲۴	۱	۳۱	۰۱				۳۲	۳	۳۵	۱
۱۵	۳۴	۲	۳۳	۸۱	۳۵	۴	۳۹				۲
۱۶	۶۳	۲	۳۵	۵۳				۳۵	۴	۳۹	۰
۱۷	۳۸	۲	۳۷	۸۱	۳۹	۴	۴۳				۲
۱۸	۸۰	۳	۴۰	۶۴				۴۰	۵	۴۵	۰
۱۹	۴۲	۲	۴۲	۰۱	۴۳	۲	۴۵				۱
۲۰	۵۶	۲	۴۴	۶۷	۴۵	۴	۴۹				۱
۲۱	۸۹	۴	۴۸	۰۱				۴۸	۳	۵۱	۰
۲۲	۱۸	۱	۴۹	۴۷	۴۹	۳	۵۲				۰
۲۳	۵۱	۲	۵۱	۷۵				۵۱	۵	۵۶	۰
۲۴	۷۱	۳	۵۴	۵۷	۵۴	۳	۵۷				۰
۲۵	۱۶	۱	۵۵	۸۷				۵۶	۶	۶۲	۱
۲۶	۹۲	۴	۵۹	۴۷	۵۹	۳	۶۲				۰
						۵۶			۴۳		۱۱

درصد مشغولیت هابیل $=\frac{۵۶}{۶۲}=۹۰\%$

درصد مشغولیت خباز $=\frac{۴۳}{۶۲}=۶۹\%$

درصد افراد انتظار کشیده $=\frac{۹}{۲۶}=۳۵\%$

مدت وسط زمان انتظار افراد در صف $=\frac{۱۱}{۹}=۱/۲۲$

مسأله پسرک روزنامه فروش

- فردی تعدادی روزنامه برای فروش در یک دوره می‌خرد. نکته قابل توجه در این مساله این است که روزنامه فروش در انتهای دوره روزنامه های باقیمانده را بایستی به قیمت کاغذ باطله بفروشد.

سود = درآمد فروش – هزینه خرید – سود از دست رفته + درآمد فروش روزنامه باطله

۲۰ ۱۳ ۷ ۲

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

توزیع احتمالی نوع روز

نوع روز	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
خوب	۰,۳۵	۰,۳۵	۰۱–۳۵
متوسط	۰,۴۵	۰,۸۰	۳۶–۸۰
بد	۰,۲۰	۱	۸۱–۰۰

توزیع روزنامه‌های مورد تقاضا

تقاضا	توزیع احتمال تقاضا		
	خوب	متوسط	بد
۴۰	۰,۰۳	۰,۱۰	۰,۴۴
۵۰	۰,۰۵	۰,۱۸	۰,۲۲
۶۰	۰,۱۵	۰,۴۰	۰,۱۶
۷۰	۰,۲۰	۰,۲۰	۰,۱۲
۸۰	۰,۳۵	۰,۰۸	۰,۰۶
۹۰	۰,۱۵	.۰۴	۰,۰۰
۱۰۰	۰,۰۷	۰,۰۰	۰,۰۰

خلاصه نتایج شبیه‌سازی مسأله روزنامه فروش

فرض می‌کنیم که شبیه‌سازی را برای خرید ۷۰ روزنامه طی یک دوره ۲۰ روزه انجام می دهیم

سود =۲۰*۶۰-۱۳*۷۰-۰+۲*۱۰

=۳۱۰

روز	ارقام تصادفی برای تعیین نوع روز	نوع روز	ارقام تصادفی برای تقاضا	تقاضا	درامد حاصل از فروش	سود از دست رفته به‌خاطر فزونی تقاضا	درامد ناشی از فروش به قیمت باطله	سود روزانه
۱	۹۴	بد	۸۰	۶۰	۱۲۰۰	-	۲۰	۳۱۰
۲	۷۷	متوسط	۲۰	۵۰	۱۰۰۰	-	۴۰	۱۳۰
۳	۴۹	متوسط	۱۵	۵۰	۱۰۰۰	-	۴۰	۱۳۰
۴	۴۵	متوسط	۸۸	۷۰	۱۴۰۰	-	-	۴۹۰
۵	۴۳	متوسط	۹۸	۹۰	۱۴۰۰	۱۴۰	-	۳۵۰
۶	۳۲	خوب	۶۵	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	-	۴۲۰
۷	۴۹	متوسط	۸۶	۷۰	۱۴۰۰	-	-	۴۹۰
۸	۰۰	بد	۷۳	۶۰	۱۲۰۰	-	۲۰	۳۱۰
۹	۱۶	خوب	۲۴	۷۰	۱۴۰۰	-	-	۴۹۰
۱۰	۲۴	خوب	۶۰	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	-	۴۲۰
۱۱	۳۱	خوب	۶۰	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	-	۴۲۰
۱۲	۱۴	خوب	۲۹	۷۰	۱۴۰۰	-	-	۴۹۰
۱۳	۴۱	متوسط	۱۸	۵۰	۱۰۰۰	-	۴۰	۱۳۰
۱۴	۶۱	متوسط	۹۰	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	-	۴۲۰
۱۵	۸۵	بد	۹۳	۷۰	۱۴۰۰	-	-	۴۹۰
۱۶	۰۸	خوب	۷۳	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	-	۴۲۰
۱۷	۱۵	خوب	۲۱	۶۰	۱۲۰۰	-	۲۰	۳۱۰
۱۸	۹۷	بد	۴۵	۵۰	۱۰۰۰	-	۴۰	۱۳۰
۱۹	۵۲	متوسط	۷۶	۷۰	۱۴۰۰	-	-	۴۹۰
۲۰	۷۸	متوسط	۹۶	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	-	۴۲۰
					۲۵۸۰۰	۵۶۰	۲۲۰	۷۲۶۰

سیاست بهینه

جدول فوق را برای تعداد خریدهای مختلف روزنامه در ابتدای روز اجرا می کنیم. جدولی که متوسط سود بیشتری را توسط شبیه سازی نشان دهد، مشخص کنندة سیاست بهینه تهیه روزنامه در ابتدای روز است.

مساله موجودی

فرض کنید در یک سیستم کنترل موجودی هر ۵ روز یک بار موجودی بررسی شده و در صورتی که مقدار موجودی کمتر از ۱۱ واحد باشد، سفارش صادر می گردد که موجودی به ۱۱ واحد برسد. سطح موجودی ابتدای دوره ۳ واحد و ورود یک سفارش ۸ واحدی در دو روز بعد دیده شده است. تقاضای روزانه و مهلت تحویل برای کالاهای انبار دارای توزیع احتمالی به شرح زیر است. وضعیت این سیستم را به کمک شبیه سازی بررسی نمایید.

مهلت تحویل	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۱	۰,۶	۰,۶	۱-۶
۲	۰,۳	۰,۹	۷-۹
۳	۰,۱	۱	۰

تقاضا	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۰	۰,۱	۰,۱	۰۱-۱۰
۱	۰,۲۵	۰,۳۵	۱۱-۳۵
۲	۰,۳۵	۰,۷	۳۶-۷۰
۳	۰,۲۱	۰,۹۱	۷۱-۹۱
۴	۰,۰۹	۱	۹۲-۰۰

خلاصه نتایج شبیه‌سازی مساله موجودی

دور	روز	موجودی در ابتدای روز	ارقام تصادفی برای تقاضا	تقاضا	موجودی در انتهای روز	مقدار کمبود	مقدار سفارش	ارقام تصادفی برای مهلت تحویل	روزهای مانده تا ورود سفارش
۱	۱	۳	۲۴	۱	۲	۰	–	–	۱
	۲	۲	۳۵	۱	۱	۰	–	–	۰
	۳	۹	۶۵	۲	۷	۰	–	–	–
	۴	۷	۸۱	۳	۴	۰	–	–	–
	۵	۴	۵۴	۲	۲	۰	۹	۵	۱
۲	۱	۲	۰۳	۰	۲	۰	–	–	۰
	۲	۱۱	۸۷	۳	۸	۰	–	–	–
	۳	۸	۲۷	۱	۷	۰	–	–	–
	۴	۷	۷۳	۳	۴	۰	–	–	–
	۵	۴	۷۰	۲	۲	۰	۹	۰	۳
۳	۱	۲	۴۷	۲	۰	۰	–	–	۲
	۲	۰	۴۵	۲	۰	۲	–	–	۱
	۳	۰	۴۸	۲	۰	۴	–	–	۰
	۴	۹	۱۷	۱	۴	۰	–	–	–
	۵	۴	۰۹	۰	۴	۰	۷	۳	۱
۴	۱	۴	۴۲	۲	۲	۰	–	–	۰
	۲	۹	۸۷	۳	۶	۰	–	–	–
	۳	۶	۲۶	۱	۵	۰	–	–	–
	۴	۵	۳۶	۲	۳	۰	–	–	–
	۵	۳	۴۰	۲	۱	۰	۱۰	۴	۱
۵	۱	۱	۰۷	۰	۱	۰	–	–	۰
	۲	۱۱	۶۳	۲	۹	۰	–	–	–
	۳	۹	۱۹	۱	۸	۰	–	–	–
	۴	۸	۸۸	۳	۵	۰	–	–	–
	۵	۵	۹۴	۴	۱	۰	۱۰	۸	۲
					۸۷				

متوسط موجودی در انتهای روز

$$= \frac{۸۷}{۲۵} = ۳.۵$$

احتمال رخدادکمبود

$$\rightarrow \underbrace{۲/۲۵}_{\text{روز}}$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

نتیجه گیری از مثال‌ها

هر شبیه‌سازی گسسته پیشامد، مدل‌سازی طی زمان از سیستمی است که تمام تغییر حالت‌های آن در لحظه‌های گسسته زمان، یعنی در لحظه‌های وقوع پیشامدها رخ می‌دهد.

در حقیقت شبیه‌سازی پیشامد با ایجاد توالیی از تصاویر پیش می‌رود که معرف تکوین سیستم طی زمان است.

حالت سیستم

- $L_Q(t)$: تعداد افراد در صف
- $L_A(t)$ وضعیت هابیل :
  - $L_A(t) = ۱$ اگر هابیل مشغول باشد.
  - $L_A(t) = ۰$ اگر هابیل بیکار باشد.
- $L_B(t)$ وضعیت خباز :
  - $L_B(t) = ۱$ اگر خباز مشغول باشد
  - $L_B(t) = ۰$ اگر خباز بیکار باشد

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

فصل سوم

آمار در شبیه‌سازی

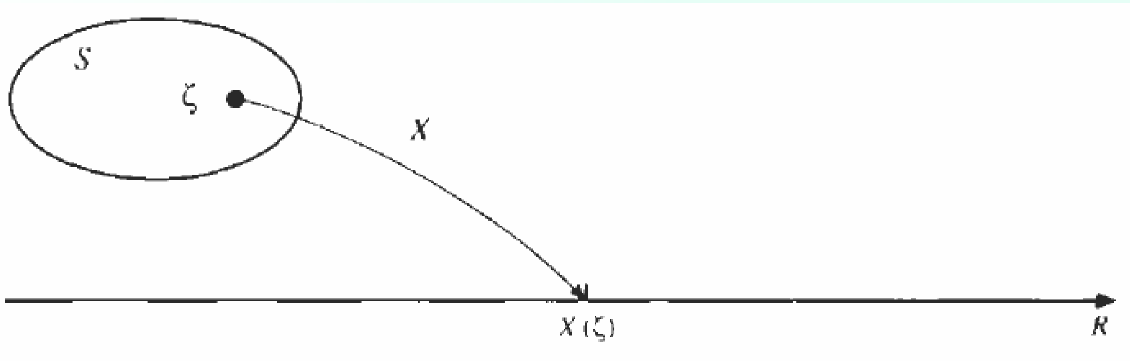
مفاهیم و تعاریف
توزیع های آماری گسسته و پیوسته و مقادیر تصادفی
ساخت اعداد تصادفی
تحلیل داده های ورودی

مفاهیم تعاریف

متغیر تصادفی

متغیر تصادفی تابعی حقیقی است از فضای نمونه به مجموعة اعداد حقیقی که به هر پیشامد فضای نمونه عددی حقیقی نسبت می دهد.

$$X(\varsigma) : S \to R$$



• متغیر تصادفی گسسته

• X را متغیر تصادفی گسسته می‌نامند، اگر مقادیری که X می‌گیرد متناهی یا نامتناهی شمارا باشد.

– تعداد سفارش‌هایی که به کارگاه می‌رسد

– انداختن یک تاس و آمدن یک عدد خاص

– تاس ناسالم که احتمال آمدن هر وجه آن با عدد هر وجه متناسب است.

$$۰ \le p(x_i) \le ۱$$

$$\sum_{x_i} p(x_i) = ۱$$

• متغیر تصادفی پیوسته

• X را متغیر تصادفی پیوسته می‌نامند، اگر مقادیری که X می‌گیرد فاصله‌ای از مجموعه فواصل باشد.

– عمر یک لامپ

$$f(x) \ge ۰$$

$$\int_x f(x) d_x = ۱$$

$$\int_{x_۰}^{x_۰} f(x) d_x = ۰$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

تابع توزیع تجمعی

$$F(x) = p(X < x) = \begin{cases} \sum_{x_i < x} p(x_i) \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = ۱$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = ۰$$

$$p(a < x \le b) = F(b) - F(a) \quad ; \quad a < b$$

If X was Continuse stochastic variable then

$$p(a \le x \le b) = p(a \le x \le b) = p(a \le x < b) = p(a < x < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

$$\mu_{(n)} = E\left(x^n\right) = \begin{cases} \sum\limits_{\forall i} x_i^{\,n} p\left(x_i\right) \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n f\left(x\right)dx \end{cases}$$

$$E\left(x\right) = \begin{cases} \sum\limits_{x_i} x_i p\left(x_i\right) \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf\left(x\right)dx \end{cases} = \mu$$

$$\operatorname{var}\left(x\right) = \sigma^{۲} = E\left[\left(x - E\left(x\right)\right)^{۲}\right] = E\left[x^{۲} + E^{۲}\left(x\right) - ۲xE\left(x\right)\right]$$

$$E\left(x^{۲}\right) + E\left[E^{۲}\left(x\right)\right] - ۲E\left[xE\left(x\right)\right] = E\left(x^{۲}\right) + E^{۲}\left(x\right) - ۲E^{۲}\left(x\right) = E\left(x^{۲}\right) - E^{۲}\left(x\right)$$

$$= \mu_{(۲)} - \mu^{۲}$$

مثال

۱- تاس غیر منصف

X_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P(x_i)$	۱/۲۱	۲/۲۱	۳/۲۱	۴/۲۱	۵/۲۱	۶/۲۱
F(X)	۱/۲۱	۳/۲۱	۶/۲۱	۱۰/۲۱	۱۵/۲۱	۱

$$E(x)=1\times\frac{1}{21}+2\times\frac{2}{21}+.....+6\times\frac{6}{21}=4.33$$

$$\operatorname{var}(x)=E(x^2)-[E(x)]^2=E(x^2)-4.33^2=21-18.78=2.22$$

۲- عمر لامپ

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-x/2} & x\geq 0\\ o\end{cases}$$

$$p(2\leq x\leq 3)=0.145$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t}{2}}dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t}{2}}dt=1-e^{\frac{-x}{2}}$$

$$E(x)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}xe^{\frac{-x}{2}}=2$$

$$Var(x)\Rightarrow\left\{E(x^2)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}x^2e^{-\frac{x}{2}}dx=8\right\}\Rightarrow Var(x)=8-2^2=4\rightarrow\sigma=\sqrt{4}=2$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

مد

مد در متغیر گسسته مقداری از متغیر تصادفی است که بیشتر از همه روی می‌دهد.

مد در متغیر پیوسته مقدار ماکسیمم تابع توزیع است

میانه

میانه در متغیر تصادفی پیوسته مقداری از متغیر تصادفی است که: F(X<x)=۱/۲

میانه در متغیر تصادفی گسسته اولین xی است که:

$$p(X < x) \geq \frac{۱}{۲}$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

مثال

- تاس غیر منصف

$$p(X<x)=\,^{۱۵}\!/_{۲۱}\geq\,^{۱}\!/_{۲}\rightarrow x=۵$$

- عمر لامپ

$$\int_{۰}\frac{۱}{۲}e^{-\frac{t}{۲}}dt=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\int_{۰}\frac{۱}{۲}e^{-\frac{t}{۲}}dt=\left(۱-e^{\frac{-x}{۲}}\right)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow e^{\frac{-x}{۲}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow-\frac{x}{۲}=\ln\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۱.۳۸۶۵$$

ضریب چولگی و کشیدگی

با وجود اینکه تعداد گشتاورها نامحدود می باشند ولی در عمل فقط تعداد کمی از آن ها مورد توجه قرار می گیرند.

$$C^{2}[X] = \frac{Var[X]}{E[X]}$$ ضریب مربع

این معیار نیز برای اندازه گیری میزان پراکندگی یا تغییرات X به کار می رود با این تفاوت که به صورت مقداری بی واحد نرمال شده است.

اگر توزیع چوله به چپ باشد چولگی منفی و اگر چوله به راست باشد چولگی مثبت و در صورت متقارن بودن چولگی صفر می شود.

$$v[X] = \frac{E[(X - E[X])^{3}]}{\sigma^{3}[X]}$$ چولگی

اگر کشیدگی انتهای تابع کم باشد این معیار منفی و اگر کشیدگی متوسط باشد صفر و در صورت زیاد بودن کشیدگی، مثبت می باشد.

$$k[X] = \frac{E[(X - E[X])^{4}]}{\sigma^{4}[X]} - 3$$ کشیدگی انتهای توزیع

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

توزیع های رایج متغیرهای تصادفی گسسته و ساخت مقادیر شبه تصادفی

$$p(x)=\frac{۱}{k} \quad ;x=۱,۲,۳,...,k$$

$$E(x)=\sum_{x=۱}^{k} x\frac{۱}{k}=\frac{۱}{k}\sum_{x=۱}^{k} x=\frac{۱}{k}*\frac{k(k+۱)}{۲}=\frac{k+۱}{۲}$$

$$Var(x)=E(x^{۲})-[E(x)]^{۲}=\sum_{x=۱}^{k} x^{۲}\frac{۱}{k}-(\frac{k+۱}{۲})^{۲}$$

$$=\frac{۱}{k}*\frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶}-\frac{(k+۱)^{۲}}{۴}$$

$$=\frac{k^{۲}-۱}{۱۲}$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

روش های ساخت مقادیر تصادفی

- روش تبدیل معکوس
- روش تبدیل مستقیم
- روش رد و قبول
- روش پیچش

چگونگی ساخت عدد تصادفی با خصوصیت توزیع یکنواخت گسسته

توزیع برنولی

- متغیر تصادفی برنولی (X) دارای دو نتیجه پیروزی و شکست می باشد. بنابراین فضای نمونه را می توان به شکل S={۰,۱} در نظر گرفت که در آن ۰ نشانگر شکست و ۱ نشان دهنده پیروزی است. توزیع برنولی به صورت Ber(p) نشان داده می شود که در آن p احتمال موفقیت و در نتیجه ۱-p احتمال شکست می باشد. نکات زیر در مورد این متغیر تصادفی قابل استخراج است.

$$p(x)=\begin{cases} p & x=۱ \\ ۱-p & x=۰ \end{cases} \Rightarrow p(x)=p^{x}q^{۱-x} \quad ; \quad x=۰,۱$$

$$E(x)=۱\times p+۰\times q=p$$

$$Var(x)=E(x^{۲})-[E(x)]^{۲}=(۱^{۲}\times p+۰^{۲}\times q)-p^{۲}=p(۱-p)=pq$$

چگونگی ساخت عدد تصادفی با خصوصیت توزیع برنولی

توزیع بینم (دو جمله ای)

فرض کنید n متغیر تصادفی برنولی با هم جمع شوند. حاصل متغیر تصادفی است که می توان آن را با عنوان تعداد پیروزی ها در n آزمایش برنولی تعبیر نمود. تابع توزیع این متغیر تصادفی را می توان به صورت زیر بدست آورد:

با توجه به تعریف متغیر تصادفی دو جمله ای داریم:

$$p(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x} & x=0,\dots n\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

چگونگی ساخت عدد تصادفی با خصوصیت توزیع دو جمله ای

$$X = X_1 + X_2 + \dots X_n$$

$$E(x) = E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = np$$

$$\mathrm{var}(x) = \mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = n\,\mathrm{var}(x_i) = npq$$

$$E(x) = \sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} n\binom{n-1}{x-1}p^{x}q^{n-x} = n\sum_{x=0}^{n}\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}q^{n-x}\times p = np\sum_{x=0}^{n}\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}q^{n-x} = np$$

$$E[x(x-1)] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x} = n\sum_{x=0}^{n}(x-1)\binom{n-1}{x-1}p^{x}q^{n-x} = n(n-1)\sum_{x=0}^{n}\left[\binom{n-2}{x-2}\right]p^{x}q^{n-x}$$

$$= n(n-1)p^{2}$$

$$\Rightarrow Var(x) = E[x(x-1)] + E(x) - [E(x)]^{2} = n^{2}p^{2} - np^{2} + np - n^{2}p^{2} = np(1-p) = npq$$

مثال

در یک فرایند ساخت، چیپ های نیمه رسانایی با ۲٪ معیوب تولید می‌شوند. در این سیستم تولیدی هر روز یک نمونه ۵۰تایی گرفته شده و اگر در نمونه بیشتر از ۲ معیوب باشد فرایند متوقف می‌شود. احتمال توقف فرایند را در هر روز بیابید.

حل: ابتدا بایستی متغیر تصادفی در این سوال تعریف شود.

X تعداد واحدهای ناقص

$$p(x)=\binom{۵۰}{x}(۰.۰۲)^{x}(۰.۹۸)^{n-x}$$

$$p(x>۲)=۱-p(X\le ۲)=۱-p(x=۰)-p(x=۱)p(x=۲)=۱-۰.۹۲=۰.۰۸$$

$$E(x)=۵۰\times ۰.۰۲$$

$$\operatorname{var}(x)=۵۰\times ۰.۰۲\times ۰.۹۸=۰.۹۸$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

آزمایش های برنولی مستقل از هم را در نظر بگیرید. متغیر تصادفی هندسی (X) تعداد آزمایش های برنولی تا رسیدن به اولین موفقیت می باشد. این توزیع به شکل Ge(p) نشان داده می شود. (p احتمال موفقیت و ۱-p احتمال شکست می باشد). از آنجا که تعداد آزمایش ها نامحدود می باشد فضای حالت به شکل {۱,۲,...,k,...}=S است.

تابع احتمال متغیر تصادفی x به شکل زیر می باشد و داریم:

P(x) =q x-۱p; x=۱, ۲, ...

E(x) =۱/p

var(x) =q/p۲

توزیع هندسی به طور گسترده در مدل های ریاضی به علت خاصیت بی حافظگی این توزیع استفاده می شود. بی حافظگی یعنی:

$$p(x > k + n \mid x > k) = p(x > n) \quad ; \quad n \geq ۱$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

مثال

در مثال قبل احتمال اینکه سومین نمونه، اولین معیوب باشد را بیابید.

پیروزی: یافتن معیوب

P(x=۳) =۰.۹۸^۲ *۰.۰۲

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

$$p(x)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}$$

$$n\to\infty,\quad np=\lambda$$

$$p(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{x!}\left(\lambda/n\right)^{x}\left(1-\lambda/n\right)^{n-x}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1(1-1/n)(1-2/n)\ldots(1-\frac{x-1}{n})}{x!}\times\lambda^{x}\left[\left(1-\lambda/n\right)^{-n/\lambda}\right]^{-\lambda}\left(1-\lambda/n\right)^{-x}$$

$$\lim_{f(x)\to 0}\left[1+f(x)\right]^{1/f(x)}=e$$

$$\Rightarrow p(x)=1/x!\times\lambda^{x}\times e^{-\lambda}$$

در نتیجه متغیر تصادفی x تمام خصوصیات تابع احتمال را دارد و تابع توزیع آن تقریبی از تابع توزیع متغیر تصادفی دو جمله ای است.

$$E(x)=\sum_{x=0}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x}}{(x-1)!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{k!}=e^{-\lambda}\times\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!}=e^{-\lambda}\times\lambda\times e^{\lambda}=\lambda$$

$$Var(x)=???$$

$$E(x)=np=\lambda$$

$$\mathrm{var}(x)=npq=\lim_{n\to\infty}\lambda\left(1-\lambda/n\right)=\lambda$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

مثال

اگر تقاضا در مهلت تحویل برای محصولی دارای توزیع پواسون با میانگین ۱۰ داشته باشد، با فاصله اطمینان ۹۵٪ در برابر کمبود نقطه سفارش مجدد را مشخص نمایید.

$$p(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\frac{e^{-۱۰}۱۰^{x}}{x!}$$

$$\sum_{i=۰}^{x}\frac{e^{-۱۰}۱۰^{i}}{i!}\geq ۰.۹۵$$

$$x=۱, x=۲, \ldots . x=۱۵$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

توزیع های رایج متغیرهای تصادفی پیوسته

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

متغیر تصادفی یکنواخت X در بازه S=[a,b],b>a مقادیری را اختیار می کند که دارای احتمال یکسان می باشند. توزیع یکنواخت به صورت Unif(a,b) نشان داده می شود. تابع چگالی به شکل زیر می باشد:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{b-a} & a \le x \le b \\ ۰ & otherwise \end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases} ۰ & x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ ۱ & x>b \end{cases}$$

$$p(x_۱ < X < x_۲)=\frac{x_۲-x_۱}{b-a}$$

$$E(x)=\frac{a+b}{۲}$$

$$\operatorname{var}(x)=\frac{(b-a)^۲}{۱۲}$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

$$x \sim Exp(\lambda)$$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x \geq ۰ \\ ۰ & otherwise\end{cases} \qquad \Rightarrow F(x)=۱-e^{-\lambda x} x \geq ۰$$

$$E(x)= {}^{۱}\!/_{\lambda}$$

$$\mathrm{var}(x)= {}^{۱}\!/_{\lambda^{۲}}$$

خاصیت بی حافظگی توزیع نمایی

$$p(x>s+t \mid x>s)=p(x>t)$$

$$\frac{p(x>s+t)}{p(x>s)}=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=p(x>t)$$

مثال

دو لامپ با عمر متوسط ۱۰۰۰ ساعت با توزیع نمایی به گونه‌ای بسته شده‌اند که در صورت خارج شدن یکی لامپ دیگر روشن می‌شود. احتمال اینکه بعد از ۲۱۶۰ ساعت لامپی روشن باشد، چقدر است.

X=X۱+X۲

X۱ ~EXP (۱/۱۰۰۰)

X۲~EXP (۱/۱۰۰۰)

$$F(x)=۱-e^{-\lambda x}\sum_{i=۰}^{\beta-۱}\frac{(\lambda x)^i}{i!}=۱-e^{-۱/۱۰۰۰x}\sum_{i=۰}^{۱}\frac{(۱/۱۰۰۰x)^i}{i!}$$

$$F(x)=۱-e^{-۲.۱۶۰}\sum_{i=۰}^{۱}\frac{(۲.۱۶)^i}{i!}=۰.۶۳۶=۰.۶۴$$

$$۱-۰.۶۴=۰.۳۶$$

- تابع گاما

$$\Gamma(B) = \int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x} dx = (\beta - 1)\Gamma(\beta - 1)$$

$$\beta \in \mathbb{N} \Rightarrow \Gamma(\beta) = (\beta - 1)!$$

If X_i has $Exp(\lambda)$ distributaion then $X = \sum_{i=1}^{\beta} X_i$ has $Gamma(\beta, \lambda)$ distributaion

$$\Rightarrow \begin{cases} E(x) = E\left(\sum_{i=1}^{\beta} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\beta} E(X_i) = \beta * E(X_i) = \dfrac{\beta}{\lambda} \\ Var(x) = Var\left(\sum_{i=1}^{\beta} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\beta} Var(X_i) = \beta * Var(X_i) = \dfrac{\beta}{\lambda^2} \end{cases}$$

- تابع توزیع گاما

$$X \sim Gamma(\beta, \lambda)$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\beta = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{\lambda^{1}}{\Gamma(1)} x^{1-1} e^{-\lambda x} = \lambda e^{-\lambda x}$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^{۲}\right)$$

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma} e^{-{}^{۱}\!/_{۲}\left({}^{x-\mu}\!/_{\sigma}\right)^{۲}} \quad -\infty < x < \infty$$

$$۱) \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = ۰$$

$$۲) f(x+\mu) = f(x-\mu)$$

$$۳) \ \mathrm{Arg}[Max(f(x))] = \mu$$

$$۴) \ F(x) = p(X < x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} e^{-{}^{۱}\!/_{۲}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{۲}} dt = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{\frac{-۱}{۲}z^{۲}} dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$۵) \ f(z) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{\frac{-۱}{۲}z^{۲}} ; -\infty < z < +\infty \to z \sim N(۰,۱)$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

امید ریاضی و واریانس توزیع نرمال

$$X \sim N(\mu, \sigma^{۲})$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) d_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma} e^{-\frac{۱}{۲}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{۲}} d_x = \mu$$

$$Var(x) = E(x^{۲}) - [E(x)]^{۲} = (\mu^{۲} + \sigma^{۲}) - (\mu)^{۲} = \sigma^{۲}$$

مثال

If $X \sim N(۵۰,۹)$ Calculate $p(x \le ۵۶)$

$$p(x \le ۵۶) = p\left(\frac{X-۵۰}{۳} < \frac{۵۶-۵۰}{۳}\right) = p(z < ۲) = \Phi(۲) = ۰.۹۷۷۲$$

If $X \sim N(۱۲,۴)$ Calculate $p(x \le ۱۰)$ and $p(۱۰ \le x \le ۱۲)$

$$F(۱۰) = \Phi\left(\frac{۱۰-۱۲}{۲}\right) = \Phi(-۱) = ۰.۱۵۸۷$$

$$p(۱۰ \le X \le ۱۲) = F(۱۲) - F(۱۰) = \Phi\left(\frac{۱۲-۱۲}{۲}\right) - \Phi\left(\frac{۱۰-۱۲}{۲}\right) = \Phi(۰) - \Phi\left(-{}^{۲}\!/_{۲}\right) = \Phi(۰) - (۱ - \Phi(+۱))$$

$$= ۰.۵ - (۱ - \Phi(+۱)) = ۰.۵ - (۱ - ۰.۰۸۴۱۳۴) = ۰.۳۴۱۳$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

مثال

اگر تقاضا برای محصولی دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۵ و واریانس ۹ باشد، نقطه سفارش مجدد را به گونه‌ای بیابید که کمبود فقط در ۵٪ مواقع رخ دهد.

$$\text{If} \quad X \sim N(۵۰,۹) \quad \text{Calculate} \quad \mathrm{p}(x \le ۵۶)$$

$$p(x > x_{.}) = ۰.۰۵$$

$$۱ - \Phi\left(\frac{x_{.} - ۲۵}{۳}\right) = ۰.۰۵$$

$$\Phi\left(\frac{x_{.} - ۲۵}{۳}\right) = ۰.۹۵ \Rightarrow \frac{x_{.} - ۲۵}{۳} = ۱.۶۵ \Rightarrow ۲۹.۹۳۵ \cong ۳۰$$

اگر به هنگام رسیدن تقاضا به ۳۰ واحد سفارش خرید صادر شود فقط در ۵٪ مواقع کمبود داریم.

$$\text{BETA Function}: B(\alpha,\beta)=\int_{۰}^{\infty} x^{\alpha-۱}(۱-x)^{\beta-۱}d_x=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\text{BETA Distribution}: f(x)=\frac{x^{\alpha-۱}(۱-x)^{\beta-۱}}{B(\alpha,\beta)} \quad , \; ۰\le X\le ۱$$

یک متغیر تصادفی بتا، اغلب در آمار برای مدلسازی یک احتمال نامعلوم که متغیر تصادفی نامیده می شود به کار می رود.

$$E(x)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$Var(x)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^{۲}(\alpha+\beta+۱)}$$

توزیع وایبول

$$X \sim Weibull(\alpha, \beta)$$

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta^{\alpha}} x^{\alpha-۱} e^{-(\frac{\alpha}{\beta})^{\alpha}} \quad , \ ۰ \leq X$$

متغیرهای تصادفی وایبول اغلب در مدلسازی فرآیند فرسودگی اجزا در تحلیل قابلیت اطمینان استفاده می شوند.

$$E(x) = \alpha\Gamma(\frac{۱}{\beta} + ۱)$$

$$Var(x) = \alpha^{۲}\left[\Gamma(\frac{۲}{\beta} + ۱) - \Gamma^{۲}(\frac{۱}{\beta} + ۱)\right]$$

نکته‌ای در باره توزیع‌های رایج آماری

می‌توان بسیاری از اتفاقاتی که در پیرامون ما رخ می‌دهد را به یکی از توزیع‌های گفته شده با فاصله اطمینان خاصی نسبت داد. پس اگر بتوانیم در مورد یک متغیر تصادفی، یکی از این توزیع‌ها برازش کنیم، تحلیل‌ها در شبیه‌سازی سمت و سوی مشخص تری می‌گیرد. در ادامه این فصل تعیین توزیع مناسب و تخمین پارامترها برای یک سری ازداده‌های مشخص انجام خواهد گرفت.

Poisson Process

A Poisson process is a special type of counting process that is a fundamental base case for defining many other types of counting processes.

Definition: The counting process $\{N(t), t \geq ۰\}$ is said to be a Poisson process with rate λ, $\lambda > ۰$, if

- $N(۰) = ۰$
- the process has independent increments
- the number of events in any interval of length t is Poisson distributed with mean λt.

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

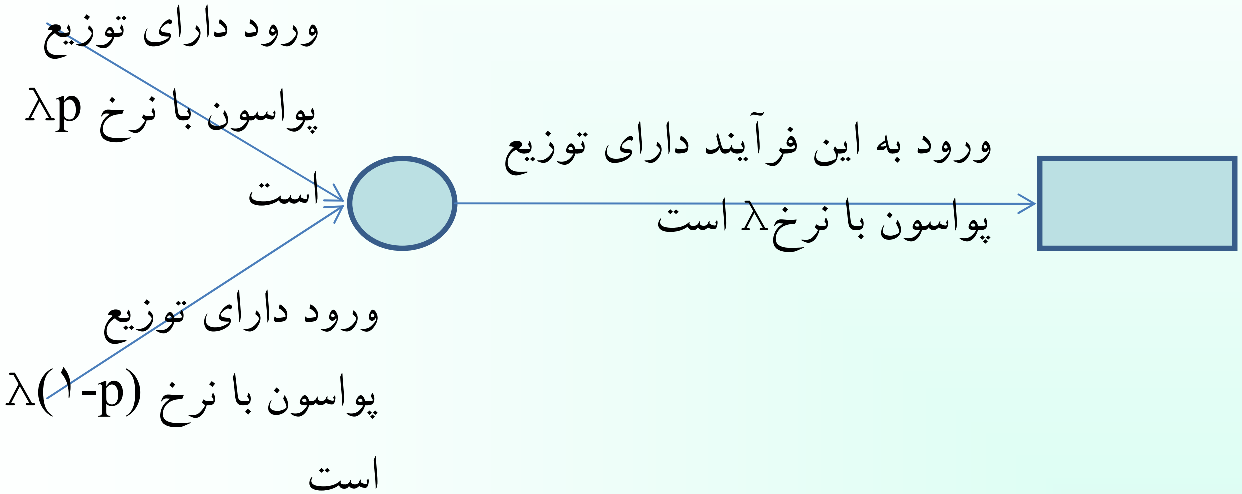
Poisson Process

The single parameter λ controls the rate at which events occur over time. Since λ is a constant, a Poisson process is often referred to as a homogeneous Poisson process. The third condition is equivalent to

$$p\left(N(t+s)-N(s)=n\right)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \quad ; \quad n=٠,١,\ldots$$

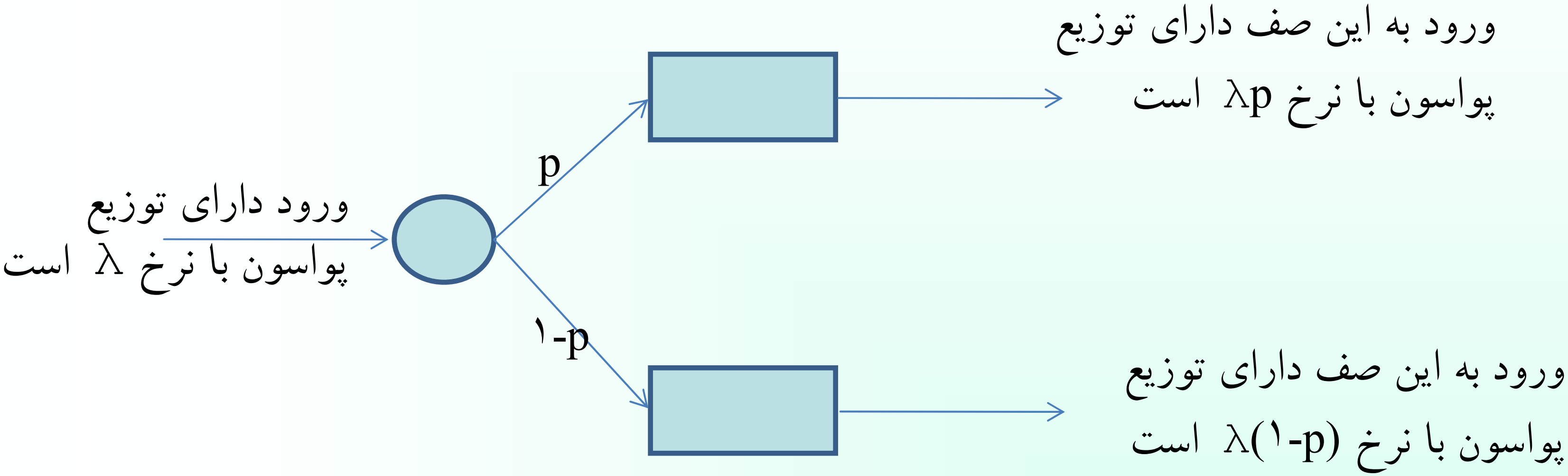
Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

نکاتی در توزیع پواسون



Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

نکاتی در توزیع پواسون



مثال

آهنگ ورود به یک فرایند دارای توزیع پواسان با میانگین ۲۰ دقیقه است. احتمال اینکه در یک دوره ۲ ساعته هیچ سفارش وارد نشود چیست؟

$$\mu = ۲۰ \ \min \Rightarrow \lambda = {}^{۶۰}\!/_{۲۰} = ۳$$

$$\lambda t = ۳ \times ۲ = ۶ \Rightarrow p(۰) = \frac{e^{-۶}\, ۶^{۰}}{۰!} = ۰.۰۰۳$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

رابطه میان فرآیند پواسون و توزیع نمایی

اگر تعداد پیروزی ها در فاصله زمانی ۰ تا t دارای توزیع پواسون باشد، می توان نشان داد که زمان رسیدن به اولین پیروزی دارای توزیع نمایی است.

اثبات:

$$X \sim Poisson(\lambda t)$$

$$\Rightarrow p\big(N(t)=n\big)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \quad ; \quad n=0,1,\ldots$$

$$p(T \le t) = 1 - p(T > t) = 1 - p(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) =$$

صفر پیروزی در فاصله زمانی صفر تا t

$$= 1 - \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow f(t) = \frac{\partial}{\partial t}(1 - e^{-\lambda t}) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow t \sim Exp(\lambda)$$

ساخت اعداد تصادفی

اعداد تصادفی

- در شبیه سازی نیازمند روش هایی برای به کارگیری تغییرات تصادفی از طریق تولید برنامه های رایانه ای هستیم.
- به منظور تولید مقادیر تصادفی نیازمند داشتن روش و برنامه رایانه ای هستیم تا دنباله ای از اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت بین صفر و یک تولید کند و هر عدد از سایر اعداد مستقل باشد.
- روش های تولید اعداد تصادفی:
  - ریختن تاس
  - جداول اعداد تصادفی
  - ابزار فیزیکی مولد
  - روش های محاسباتی مبتنی بر الگوریتمهای خطی تکرار پذیر
- در این فصل:
  - به ارائه برخی از روش های محاسباتی تولید اعداد تصادفی می پردازیم
  - ضوابط ارزیابی، مقایسه و انتخاب را عرضه می کنیم
  - آزمایش های مربوط به تصادفی بودن اعداد به دست آمده از مولدها را معرفی می کنیم

یکی از موارد کلیدی در شبیه سازی سیستم ها پیشامد تولید اعداد شبه تصادفی است. بدین منظور دو مرحله کلي وجود دارد:

- ساخت مجموعه ای از اعداد
- تست این که اعداد تولید شده تصادفی اند، یعنی
  - دارای توزیع یکنواخت بین صفر تا یک باشند (یعنی احتمال قرار گرفتن در هر فاصله‌ای برابر با طول آن فاصله باشد).
  - اعداد تولید شده مستقل از هم باشند (یعنی هیچ‌گونه ارتباطی بین مقدار فعلی متغیر تصادفی و مقدار پیشین آن وجود نداشته باشد).

خواص ضمنی اعداد تصادفی

- تابع چگالی
- امید ریاضی و واریانس
- اگر فاصله (۱و۰) را به n رده یا زیر فاصله مساوی تقسیم شود، انتظار می‌رود که از N مشاهده N/n در هر رده قرار گیرد.
- احتمال مشاهده یک عدد در یک رده فاصله خاص مستقل از سایر مشاهده‌هاست. یعنی همبسگی بین اعداد وجود نداشته باشد.

خواص اعداد تصادفی

۱. روش یا الگوریتم تولید اعداد تصادفی می‌بایست سریع باشد.
۲. الگوریتم نباید نیاز به مقدار زیادی حافظه کامپیوتر داشته باشد و می‌بایست قابل برنامه‌نویسی کامپیوتری باشد.
۳. طول دنباله اعداد تولید شده باید به اندازه کافی بلند باشد (به دلیل اینکه در نهایت از یک الگوریتم برای تولید اعداد تصادفی استفاده می‌شود. ایجاد سیکل اجتناب ناپذیر خواهد بود ولی طول سیکل بلند (مثلا چند میلیون و یا چند میلیارد) اهداف شبیه‌سازی را تأمین خواهد کرد).
۴. اعداد تولید شده قبلی در صورت نیاز تکرار پذیر باشد تا بتوان برای مقایسه دو سیستم از آن استفاده کرد
۵. از همه مهمتر اعداد تولید شده باید تا حدود زیادی از خواص توزیع یکنواخت و استقلال برخوردار باشد.

تولید اعداد شبه تصادفی

- شبه تصادفی چون اگر روش قطعی و مشخص باشد مجموعه اعداد تولید شده تکرارپذیر بوده و واقعا تصادفی نیست.

- اشکالاتی که در تولید رخ می دهد:
  - اعداد تصادفی ممکن است توزیع احتمال یکنواخت نداشته باشد.
  - میانگین اعداد تولید شده ممکن است بیش از حد بزرگ یا کوچک باشد.
  - واریانس اعداد تصادفی ممکن است تفاوت قابل توجهی از مقدار متعارف داشته باشد.
  - ممکن است دنباله اعداد تولید شده تغییراتی متناوب مانند زیر داشته باشد:
    - وجود همبستگی بین اعداد
    - وجود رابطه مقداری بین اعداد مجاور به صورت نزولی یا صعودی بودن
    - وجود چند عدد بزرگتر از میانگین و به دنبال آن چند عدد کوچکتر از میانگین

- روش میان مربعی:

۱. انتخاب یک هسته n رقمی

۲. مربع کردن آن(اگر مربع ۲n-۱رقمی باشد سمت چپ ۰ اضافه می شود.)

۳. اگر n زوج باشد n/۲ رقم از چپ و راست حذف می کنیم و در سمت چپ ارقام ممیز می گذاریم.

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

روش میان مربعی

مثال ۱: X۰=۵۴۹۷

$$X_۰ = ۵۴۹۷ \Rightarrow$$
$$X_۰^۲ = ۳۰۲۱۷۰۰۹ \Rightarrow X_۱ = ۲۱۷۰ \Rightarrow R_۱ = ۰.۲۱۷۰$$
$$X_۱^۲ = ۰۴۷۰۸۹۰۰ \Rightarrow X_۲ = ۷۹۸۹ \Rightarrow R_۲ = ۰.۷۹۸۹$$
$$X_۲^۲ = ۰۴۷۰۸۹۰۰ \Rightarrow X_۳ = ۷۰۸۹ \Rightarrow R_۳ = ۰.۷۰۸۹$$

مثال ۲: x۰=۵۱۹۷

$$X_۰ = ۵۱۹۷ \Rightarrow$$
$$X_۰^۲ = ۲۷۰۰۸۸۰۹ \Rightarrow X_۱ = ۰۰۸۸ \Rightarrow R_۱ = ۰.۰۰۸۸$$
$$X_۱^۲ = ۰۰۰۰۷۷۴۴ \Rightarrow X_۲ = ۰۰۷۷ \Rightarrow R_۲ = ۰.۰۰۷۷$$
$$X_۲^۲ = ۰۰۰۰۵۹۲۹ \Rightarrow X_۳ = ۰۰۵۹ \Rightarrow R_۳ = ۰.۰۰۵۹$$

X۰=۶۵۰۰

مقدار تکراری یا ۰ برای ارقام میانی منجر به فروپاشی الگوریتم می شود.

$$X_i = ۶۵۰۰ \Rightarrow$$
$$X_i^۲ = ۴۲۲۵۰۰۰۰ \Rightarrow X_{i+۱} = ۲۵۰۰ \Rightarrow R_{i+۱} = ۰.۲۵۰۰$$
$$X_{i+۱}^۲ = ۰۶۲۵۰۰۰۰ \Rightarrow X_{i+۲} = ۲۵۰۰ \Rightarrow R_{i+۲} = ۰.۲۵۰۰$$

- روش هایی که فقط اهمیت تاریخی دارد
  - روش میان ضربی
    - X_0, X_0' با n رقم را در نظر گرفته در هم ضرب می کنیم
    - مانند روش میان مربعی n رقم میانی را گرفته و با اعشار عدد اول را می سازیم هسته را n رقم میانی قرار داده و به همراه X_1 مراحل را تکرار می کنیم
    - مثال:

$$X_0' = ۲۹۳۸, X_0 = ۷۲۲۹ \Rightarrow$$

$$U_1 = X_0' * X_0 = ۲۱۲۳۸۸۰۲ \Rightarrow X_1 = ۲۳۸۸ \Rightarrow R_1 = ۰.۲۳۸۸$$

$$U_2 = X_0 * X_1 = ۱۷۲۶۲۸۵۲ \Rightarrow X_2 = ۲۶۲۸ \Rightarrow R_2 = ۰.۲۶۲۸$$

  - روش مضرب ثابت
    - اگر هسته اول همواره تکرار گردد روش مضرب ثابت به دست می آید

- روش هایی که فقط اهمیت تاریخی دارد
  - روش همنهشتی جمعی
    - دنباله n تایی مانند $X_1, X_2, ..., X_n$ را می گیرد و بقیه دنباله را تولید می کند
    - اساس تولید مقدار رابطه زیر است: $X_i \equiv (X_{i-1} + X_{i-n}) \bmod m, i = n+1, n+2, ...$
  - سرعت تولید بسیار بالاست
  - مثال: n=5 و m=100 و $X_1, X_2, ..., X_5$ به ترتیب ۵۷و۳۴و۸۹و۹۲و۱۶

$$X_6 \equiv (X_5 + X_1) \bmod 100 = 73 \bmod 100 = 73$$
$$X_7 \equiv (X_6 + X_2) \bmod 100 = 107 \bmod 100 = 7$$
$$X_8 \equiv (X_7 + X_3) \bmod 100 = 96 \bmod 100 = 96$$
$$X_9 \equiv (X_8 + X_4) \bmod 100 = 188 \bmod 100 = 88$$

...

- مولدهای همنهشتی خطی
  - X_0: مقدار اولیه هسته
  - a: ضریب ثابت مولد
  - c: مقدار ثابت مولد
  - m: مقدار پیمانه
  - نحوه انتخاب مقادیر پارامترها تأثیر فراوانی در خواص آماری از قبیل میانگین، واریانس و طول سیکل دارد. وقتی c مخالف صفر باشد مولد را مولد همنهشتی آمیخته می‌نامند و در صورتی که c برابر صفر باشد مولد همنهشت ضربی نامیده می‌شود.

$$X_i \overset{m}{\equiv} (aX_{i-1} + c)$$

$$R_i = \frac{X_i}{m}, i = 1,2,\ldots$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

- مولدهای همنهشتی خطی
  - مثال: $X_۰=۲۷$ و $a=۱۷$ و $c=۴۳$ و $m=۱۰۰$

$$X_۰=۲۷ \Rightarrow X_۱ \equiv [۱۷(۲۷)+۴۳] \bmod ۱۰۰ = ۵۰۲ \bmod ۱۰۰ = ۲ \Rightarrow R_۱ = X_۱/m = ۰.۰۲$$

$$X_۲ \equiv [۱۷(۲)+۴۳] \bmod ۱۰۰ = ۷۷ \bmod ۱۰۰ = ۷۷ \Rightarrow R_۲ = X_۲/m = ۰.۷۷$$

$$X_۳ \equiv [۱۷(۷۷)+۴۳] \bmod ۱۰۰ = ۱۳۵۲ \bmod ۱۰۰ = ۵۲ \Rightarrow R_۳ = X_۳/m = ۰.۵۲$$

  - برای تراکم بالاتر باید m بسیار بزرگ باشد.
  - اگر $a=\sqrt{m}$ کوچکترین ضریب همبستگی زنجیره ای مرتبه یک حاصل می شود.

- ملاحظات مربوط به طول دنباله در مولد همنهشتی ضربی
  - اگر m به صورت P^w باشد که p پایه عددی و w عدد طبیعی باشد
    - برای تبدیل عدد خروجی به یک عدد بین صفر و یک تنها با نوشتن یک ممیز در سمت چپ قابل انجام است.
  - $۰ < a \le m$ چرا؟
  - h طول دنباله است.
  - مثال ۷–۱۰: b=۶, a=۱۳, X. =۳ or ۱

$$m = ۲^b ; X_. \in Z \,\&\, odd ; a = ۴t + ۱ \,\&\, t odd \Rightarrow h = ۲^{b-۲}$$

- ملاحظات مربوط به طول دنباله در مولد همنهشتی ضربی
  - اگر m بزرگترین عدد اول کوچکتر از ۲^b و a ریشه اولیه برای m باشد طول دنباله مساوی m-۱ خواهد بود.
  - اگر به ازای مقادیر صحیح برای h و t رابطه $a^h = tm + ۱$ و h کوچکترین عدد صحیح از این دست باشد a ریشه اولیه m خواهد بود.
  - تعداد ریشه های اولیه عدد اول m برابر است با یک به علاوه تعداد اعداد صحیحی که از m-۱ کوچکتر و نسبت به آن اول است.
  - مثال ۱۱–۷: b=۴
    - m=۱۳ و m-۱=۱۲ و اعداد ۵و۷و۱۱ کوچکتر از ۱۲ و نسبت به آن اول است بنابر این m دارای ۴ ریشه اولیه است؟
  - مثال ۱۲-۷: b=۶ و a=۷

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

- ملاحظات مربوط به طول دنباله در مولد همنهشتی آمیخته
  - می توان با شرایط زیر دنباله ای به طول m تولید کرد
    - m و c باید نسبت به هم اول باشند.
    - ۱-a باید مضربی از تمام عوامل اول تشکیل دهنده m باشد.
    - اگر m مضربی از ۴ باشد ۱-a نیز باید مضربی از ۴ باشد و اگر $m = ۲^b$ باید a=۲t+۱
  - مثال ۱۳–۷: b=۴ و c=۱۱ و a=۹ و $X_۰$ =۷
    - طول دنباله برابر m و دارای مقدار ۱۶ است

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

ملاحظات مربوط به تصادفی بودن اعداد موجود در یک دنباله

- **آزمون های فراوانی:** به منظور سنجش همگونی توزیع آماری با توزیع احتمال یکنواخت استفاده می شود:
  - آزمون کالموگروف–اسمیرنف
  - آزمون مربع کای
- **آزمون های استقلال:** به منظور بررسی استقلال اعداد موجود در دنباله به کار می رود:
  - آزمون افراز: اعداد تولید شده را به صورت دسته های معمولا ۵تایی بررسی نموده و عملکرد واقعی و نظری را بر اساس آزمون مربع کای مقایسه می کند.
  - آزمون شکاف: این آزمون به شمارش ارقامی که در یک دنباله بین دو تکرار متوالی از رقم خاصی قرار دارند می پردازد و بر اساس آزمون مربع کای همگرایی فواصل عملی و نظری را مورد بررسی قرار می دهد.
  - آزمونهای روند: از طریق مقایسه عملی و نظری به بررسی روندهای صعودی و نزولی، روندهای بزرگتر و کوچکتر از میانگین در دنباله ای از اعداد تصادفی می پردازد.
  - آزمون همبستگی: همبستگی موجود بین اعداد تصادفی را آزمایش می کند و همبستگی نمونه را با مقدار انتظاری صفر مقایسه می نماید.

تست یکنواختی توزیع اعداد تولید شده

الگوریتم های تست یکنواختی اعداد تصادفی بر پایه تئوری‌های آماری، یا آزمونهای فرض می‌باشند. به عنوان مثال در تست توزیع یکنواخت ما دو فرض داریم که یکی بیان می‌کند که اعداد تصادفی توزیع یکنواخت دارند که ما آن را فرض صفر می‌نامیم و دیگری بیان می‌کند که اعداد تصادفی توزیع یکنواخت ندارند و ما ان را $H_۱$ می‌نامیم که در آمار به عنوان فرض جایگزین شناخته می‌شود. در این تست آماری علاقه‌مند به بررسی نتیجه فرض صفر رد کردن آن و یا عدم رد آن هستیم.

$H_۰:\quad R_i \sim U[۰,۱]$ اعداد توزیع یکنواخت دارد

(صحت فرض صفر|رد فرض صفر)p=احتمال خطای نوع اول

(فرض صفر غلط|پذیرش فرض صفر) p=احتمال خطای نوع دوم

$H_۱:\quad R_i \not\sim U[۰,۱]$ اعداد دارای توزیع یکنواخت نیستند

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

- آزمونهای فراوانی
  - آزمون مربع کای

- قضیه ۱: فرض کنید $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{k-1})$ یک بردار تصادفی چند جمله ای با پارامترهای $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, n$ است با میل n به سمت بی نهایت توزیع متغیر تصادفی زیر به سمت توزیع مربع کای با k-۱ درجه آزادی می رود.

$$U = \sum_{i=1}^{k} \frac{(Y_i - np_i)^2}{np_i}, np_i \geq 5$$

- قضیه ۲: فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی در مورد متغیر تصادفی X باشد و فرض صفری را به شکل $H_0 = X \sim F$ تعریف نماییم. اگر محور اعداد حقیقی به وسیله مجموعه های $A_1, A_2, \ldots, A_k$ افراز گردد و داشته باشیم $P(X \in A_i) = p_i, i = 1,2,\ldots,k$ و بردار $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{k-1})$ توزیع احتمال چند جمله ای دارد.

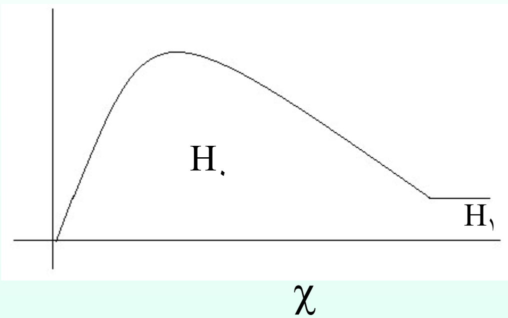
$$Y_i = (N(X_j) \in A_i), j = 1,2,\ldots,n; i = 1,2,\ldots,k$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

آزمون مربع کای

اعداد زیر با یک رویه خاص تولید شده اند. آیا این اعداد در سطح معنی دار ۹۵% دارای تابع توزیع یکنواخت می باشند؟

۰.۳۴	۰.۹۰	۰.۲۵	۰.۸۹	۰.۸۷	۰.۴۴	۰.۱۲	۰.۲۱	۰.۴۶	۰.۶۷
۰.۸۳	۰.۷۶	۰.۷۹	۰.۶۴	۰.۷۰	۰.۸۱	۰.۹۴	۰.۷۴	۰.۲۲	۰.۷۴
۰.۹۶	۰.۹۹	۰.۷۷	۰.۶۷	۰.۵۶	۰.۴۱	۰.۵۲	۰.۷۳	۰.۹۹	۰.۰۲
۰.۴۷	۰.۳۰	۰.۱۷	۰.۸۲	۰.۵۶	۰.۰۵	۰.۴۵	۰.۳۱	۰.۷۸	۰.۰۵
۰.۷۹	۰.۷۱	۰.۲۳	۰.۱۹	۰.۸۲	۰.۹۳	۰.۶۵	۰.۳۷	۰.۳۹	۰.۴۲
۰.۹۹	۰.۱۷	۰.۹۹	۰.۴۶	۰.۰۵	۰.۶۶	۰.۱۰	۰.۴۲	۰.۱۸	۰.۴۹
۰.۳۷	۰.۵۱	۰.۵۴	۰.۰۱	۰.۸۱	۰.۲۸	۰.۶۹	۰.۳۴	۰.۷۵	۰.۴۹
۰.۷۲	۰.۴۳	۰.۵۶	۰.۹۷	۰.۳۰	۰.۹۴	۰.۹۶	۰.۵۸	۰.۷۳	۰.۰۵
۰.۰۶	۰.۳۹	۰.۸۴	۰.۲۴	۰.۴۰	۰.۶۴	۰.۴۰	۰.۱۹	۰.۷۹	۰.۶۲
۰.۱۸	۰.۲۶	۰.۹۷	۰.۸۸	۰.۶۴	۰.۴۷	۰.۶۰	۰.۱۱	۰.۲۹	۰.۷۸



Interval	O_i	E_i	$O_i - E_i$	$(O_i - E_i)^2$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
1	8	10	−2	4	0.4
2	8	10	−2	4	0.4
3	10	10	0	0	0.0
4	9	10	−1	1	0.1
5	12	10	2	4	0.4
6	8	10	−2	4	0.4
7	10	10	0	0	0.0
8	14	10	4	16	1.6
9	10	10	0	0	0.0
10	11	10	1	1	0.1
	100	100	0		3.4

$$\chi^{۲}_{۰.۰۵,۹} = ۱۶.۹ \Rightarrow$$

دلیلی بر رد فرض صفر وجود ندارد

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

- آزمون مربع کای
  - آزمون را فقط در یک نوبت برای کل اعداد نمی توان انجام داد.
  - مثلا اگر N=۱۰۰۰۰ عدد تصادفی داشته باشیم باید آن را به M=۱۰۰ دسته n=۱۰۰ تایی تقسیم نماییم و برای هر یک از M دسته آماره U را با k=۱۰ محاسبه کرد این آماره باید دارای توزیع مربع کای با ۹ درجه آزادی باشد.
  - یعنی ۱۰۰ مقدار U وجود دارد که مایلیم بدانیم دارای توزیع مربع کای با ۹ درجه آزادی هست یا خیر اگر دلیلی مبنی بر رد داشتن این توزیع مشاهده نشود یعنی دلیلی بر رد توزیع یکنواخت داشتن اعداد تصادفی نیز وجود ندارد.
  - می توان سطح زیر تابع چگالی مربع کای با ۹ درجه آزادی را به ۱۰ سطح مساوی تقسیم نمود و انتظار می رود در هرقسمت به تعداد مساوی از U ها مشاهده گردد که خود این موضوع را نیز می توان با یک آماره مربع کای با ۹ درجه آزادی بررسی کرد.

- آزمونهای فراوانی
  - آزمون کالموگروف–اسمیرنف
    - مبنای این آزمون بر اساس بررسی بیشترین فاصله بین توزیع های تجمعی تجربی و مورد بررسی است. اگر این فاصله به اندازه کافی کم باشد یعنی دلیلی بر رد نداشتن توزیع مورد نظر مشاهده نمی گردد.
    - اگر X متغیری تصادفی باشد $F(x) = P(X \le x)$ اگر از متغیر تصادفی X تعداد مشاهده به دست آید تابع توزیع تجربی X به شرح زیر است $x_1, x_2, \ldots, x_N$
    - در این آزمون قصد بررسی فرضیه آماری $H_0 = X \sim F$ را داریم
    - تعریف: تصور کنید $X_1, X_2, \ldots, X_N$ یک نمونه از توزیع احتمال F باشد به آماره زیر آماره دو طرفه کالموگروف–اسمیرنف گویند و آماره های بعدی آماره های یکطرفه مورد نظر هستند.

$$F_N(x) = \frac{N(x_i \le x)}{N}; i = 1, 2, \ldots, N$$

$$D = \max_x |F_N(x) - F(x)|; D^+ = \max_x [F_N(x) - F(x)]; D^- = \max_x [F(x) - F_N(x)]$$

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

مثال ۱- تست یکنواختی KS

فرض کنید توسط یک رویه ساخت اعداد تصادفی، اعداد زیر ساخته شده اند(با فاصله اطمینان ۹۵٪):

۰,۸۱ و ۰,۱۴ و ۰,۰۵ و ۰,۹۳ و ۰,۴۴

آیا این اعداد به طور یکنواخت توزیع شده اند؟

$R_{(i)}$	0.05	0.14	0.44	0.81	0.93
i/N	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
$i/N - R_{(i)}$	0.15	0.26	0.16	—	0.07
$R_{(i)} - (i-1)/N$	0.05	—	0.04	0.21	0.13

$D^{+} = ۰.۲۶$

$D^{-} = ۰.۲۱$

$$\Rightarrow \begin{cases} D = Max\{۰.۲۱, ۰.۲۶\} = ۰.۲۶ \\ D_{۰.۰۵,۵} = ۰.۵۶ \end{cases} \Rightarrow D_{۰.۰۵,۵} > D \Rightarrow$$ دلیلی بر رد فرض صفر وجود ندارد

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

- آزمون های فراوانی
  - مقایسه

- آزمون k-s تک تک مشاهدات را در نظر می‌گیرد، ولی کای دو مشاهدات را رده بندی کرده و بدین ترتیب تعدادی از داده‌ها حذف شده و دقت کم می‌شود.
- در مواردی که تعداد مشاهدات کم است، k-s به دلیل دقیق بودن قابل اعمال است، ولی کای دو بیشتر برای نمونه‌های بزرگ کاربرد دارد.

- کای دو هم در مورد داده‌های پیوسته و هم گسسته قابل به کارگیری است، ولی k-s تنها برای مواردی که تابع توزیع تجمعی جهشی نیست. قابل به کارگیری است.

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

اگر داده های تولید شده توسط یک مولد خاص، تصادفی باشند، نبایستی هیچ نظمی به هیچ طریقی میان آن ها وجود داشته باشد. در حقیقت برای بررسی عدم وجود نظم میان داده ها، آزمون فرض زیر انجام می شود.

$$H_۰ : \rho_{im} = ۰$$

$$H_۱ : \rho_{im} \neq ۰$$

در این آزمون می توان نشان داد که آماره آزمون برابر است با:

$$Z = \frac{\hat{\rho}_{im}}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_{im}}}$$

در این رابطه پارامترهای به صورت زیر به دست می آید:

$$\hat{\rho}_{im} = \frac{۱}{M+۱}\left[\sum_{k=۰}^{M} R_{i+km} R_{i+(k+۱)m}\right] - ۰.۲۵$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_{im}} = \frac{\sqrt{۱۳M+۷}}{۱۲(M+۱)}$$

مثال

توسط یک مولد خاص، اعداد زیر تولید شده است. آیا بر اساس تست همبستگی، می توان اعداد سوم، هشتم، سیزدهم، ... را در سطح ۹۵٪ تصادفی دانست؟

۰,۹۳	۰,۸۳	۰,۲۸	۰,۶۴	۰,۳۱	۰,۸۹	۰,۲۸	۰,۲۳	۰,۰۱	۰,۱۲
۰,۸۸	۰,۷۵	۰,۲۷	۰,۶۰	۰,۴۱	۰,۹۱	۰,۳۵	۰,۳۳	۰,۱۵	۰,۹۹
۰,۸۷	۰,۶۹	۰,۳۶	۰,۱۹	۰,۵۸	۰,۹۵	۰,۴۳	۰,۰۵	۰,۴۹	۰,۶۸

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com

حل

$i = ۳ \qquad N = ۳۰ \qquad M = ۴$

$\alpha = ۰.۰۵ \Rightarrow Z_{\frac{۰.۰۵}{۲}} = ۱.۹۶$

$$\hat{\rho}_{im} = \frac{۱}{۴+۱}(۰.۲۳ * ۰.۲۸ + ۰.۲۸ * ۰.۳۳ + ۰.۳۳ * ۰.۲۷$$

$$+ ۰.۲۷ * ۰.۰۵ + ۰.۰۵ * ۰.۳۶) - ۰.۲۵ = -۰.۱۹۴۵$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_{im}} = \frac{\sqrt{۱۳ * ۴ + ۷}}{۱۲(۴+۱)} = ۰.۱۲۸۰$$

$$\Rightarrow Z = \frac{-۰.۱۹۴۵}{۰.۱۲۸۰} = -۱.۵۱۶ \Rightarrow -۱.۹۶ \le -۱.۵۱۶ \le ۱.۹۶$$

دلیلی بر رد فرض صفر وجودندارد

Email:ComputerCollege_Fam@Yahoo.Com